ÜBER OPERATOREN MIT ENDLICHEN DEFEKTEN

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

HARRO HEUSER

aus Nastätten

- 1956 -

5547

ÜBER OPERATOREN MIT ENDLICHEN DEFEKTEN

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

HARRO HEUSER

aus Nastätten

- 1956 -

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juli 1956

Dekan: Professor Dr. Wielandt

1. Berichterstatter: Professor Dr. Kamke

2. Berichterstatter: Professor Dr. Kneser

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Über Operatoren mit endlichen Defekten

von

Harro Heuser

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Definitionen und Hilfssätze	4
§ 2. Operatoren mit endlichen Defekten	19
§ 3. Finite Operatoren auf normierten linearen Räumen	45
§ 4. Normale und symmetrisierbare finite Operatoren	56
§ 5. Symmetrische finite Operatoren	82
Literaturverzeichnis	117

Einleitung

In den letzten Jahren sind mehrere Arbeiten erschienen, in denen "Fredholmsche Operatoren" bzw. "verallgemeinerte Fredholmsche Operatoren" auf Banach-Räumen untersucht werden [1]. Zweck dieser Arbeit ist, zur Gleichungs- und Spektraltheorie dieser und verwandter Operatoren einen Beitrag zu geben.

Das Ziel ist dabei das gleiche, das Wielandt [19] ausgesprochen hat, nämlich die Geometrisierung der Eigenwerttheorie zu einer Algebraisierung weiterzuführen und so möglichst frei zu werden von topologischen Voraussetzungen über Operatoren und ihre Definitionsräume (zum Beispiel Beschränktheit der Operatoren und Vollständigkeit der Räume), Voraussetzungen, die in praktisch auftretenden Eigenwertaufgaben oft nur mit Mühe nchzuprüfen sind, während die algebraischen Eigenschaften solcher Probleme manchmal leicht zu Tage treten.

Wir vermeiden deshalb bei der Abgrenzung der Operatorenklasse, die untersucht werden soll, den Begriff des adjungierten Operators, im Gegensatz zu den eingangs erwähnten Arbeiten, und führen dafür die Begriffe Bilddefekt und Nulldefekt [2] des betreffenden Operators ein, die im wesentlichen endlich und in den Hauptteilen dieser Arbeit gleich sein sollen, und benutzen ausserdem noch zwei Kettenbedingungen [3], die zuerst F. Riesz zur Untersuchung der vollstetigen Operatoren herangezogen hat.

---

1) Vgl. §3 und die dort zitierte Literatur, insbesondere die Uebersicht in der Einleitung zu Atkinson [2].

2) Diese Begriffe werden auf S. 9 definiert.

3) Siehe S. 10 und 11.

Diese Begriffe haben einen Sinn für Operatoren T auf beliebigen linearen Systemen. Sie werden in den beiden ersten Paragraphen dieser Arbeit untersucht.

Für die Behandlung von Eigenwertaufgaben werden sodann Operatoren der Form $T = A - \zeta I$ (I = identischer Operator) betrachtet. Dabei werden die Operatoren A in den Paragraphen 3 bis 5 eingeschränkt zu finiten und vollfiniten Operatoren [4] auf Banach-Räumen und Hilbert-Räumen. In §3 stellen wir die Beziehungen der hier verwendeten Begriffe zu den Begriffen der Lösungstheorie linearer Funktionalgleichungen her und charakterisieren spektral diejenigen beschränkten vollfiniten Operatoren A, bei denen der Bildbereich von $A - \zeta I$ für jedes $\zeta \neq 0$ abgeschlossen ist. In §4 untersuchen wir die normalen finiten Operatoren auf Hilbert-Räumen und stellen ihre Identität mit den normalen vollstetigen Operatoren fest, anschliessend betrachten wir symmetrisierbare finite Operatoren, beweisen mit Hilfe eines Extremalverfahrens konstruktiv die Existenz von Eigenwerten und geben eine (verallgemeinerte) Entwicklung gewisser Elemente des Definitionsraumes nach Eigenlösungen an. Da vollstetige Operatoren und auch Operatoren A, bei denen für eine natürliche Zahl n der n-fach iterierte Operator A^n vollstetig ist, nach der Rieszschen Theorie finit sind, enthalten unsere Sätze über symmetrisierbare finite Operatoren die Ergebnisse von Zaanen und Reid über symmetrisierbare vollstetige Operatoren.

Der letzte Paragraph dieser Arbeit führt Untersuchungen

[4] Zur Definition dieser Begriffe siehe S. 42.

über symmetrische finite Operatoren auf linearen Systemen mit Skalarprodukt weiter, die von Wielandt [5] begonnen wurden. Methodisch unterscheidet sich unsere Untersuchung von der Wielandtschen dadurch, dass wir die Theorie der symmetrischen finiten Operatoren auf die Betrachtung ihrer selbstadjungierten Erweiterungen stützen, um uns der Hilfsmittel der Spektraltheorie zu vergewissern. Wir gewinnen auf diese Weise die Wielandtschen Sätze (Existenzsatz für Eigenwerte, Entwicklungssatz) wieder und erhalten durch weitere Ergebnisse einen Einblick in die Struktur der symmetrischen finiten Operatoren und ihrer Spektren. Diese Ergebnisse ermöglichen es, die Beziehungen zwischen symmetrischen finiten und symmetrischen vollstetigen Operatoren zu klären und genaue Bedingungen für die Finitheit eines symmetrischen Operators anzugeben.

---

[5] Wielandt [19] und [20]. Wielandt nimmt gelegentlich das Skalarprodukt nur als positiv semidefinit an (die unter dieser Voraussetzung gewonnenen Sätze sind dann auch Sätze über symmetrisierbare Operatoren, vgl. §4), während wir es als positiv definit voraussetzen. Wir erhalten dafür teilweise schärfere Ergebnisse.

§1. Definitionen und Hilfssätze.

In dieser Arbeit bedeute durchweg $\mathfrak{T}$ ein lineares System über dem Körper der komplexen Zahlen (vgl. Hille [9], Def. 1.9.1). Zwei lineare Untersysteme $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ von $\mathfrak{T}$ heissen zueinander komplementär, wenn

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 \,, \quad \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = 0$$

ist; dabei bedeutet $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$ die Menge aller Elemente $u_1 + u_2$ mit $u_i \in \mathfrak{U}_i$ und 0 das Nullelement von $\mathfrak{T}$. Wir werden auch sagen, dass $\mathfrak{T}$ in die beiden komplementären Untersysteme $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ zerfällt oder dass $\mathfrak{U}_1$ (bzw. $\mathfrak{U}_2$) ein Komplement zu $\mathfrak{U}_2$ (bzw. $\mathfrak{U}_1$) in $\mathfrak{T}$ ist.

Ist $\mathfrak{U}$ ein lineares Untersystem von $\mathfrak{T}$, so heissen die Elemente $s_1, \ldots, s_n$ aus $\mathfrak{T}$ linear abhängig über $\mathfrak{U}$, wenn es eine Linearkombination $\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n$ der s_i mit $\sum |\alpha_i| > 0$ gibt, die in $\mathfrak{U}$ liegt, andernfalls heissen sie linear unabhängig über $\mathfrak{U}$. Es folgt, dass die $s_1, \ldots, s_n$ genau dann über $\mathfrak{U}$ linear unabhängig sind, wenn sie im gewöhnlichen Sinne (d.h. über dem System $\mathfrak{U}_0 = 0$) linear unabhängig sind und das von ihnen aufgespannte lineare System mit $\mathfrak{U}$ nur das Nullelement gemeinsam hat.

Unendlich viele Elemente aus $\mathfrak{T}$ heissen linear unabhängig über $\mathfrak{U}$, wenn jede endliche Teilmenge von ihnen linear unabhängig über $\mathfrak{U}$ ist.

Die Maximalzahl der über $\mathfrak{U}$ linear unabhängigen Elemente aus $\mathfrak{T}$ heisst die Dimension von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$ und wird mit $[\mathfrak{T} - \mathfrak{U}]$ bezeichnet[1]. $[\mathfrak{T} - 0]$ ist die gewöhnliche

[1] Diese Bezeichnung wurde von Wielandt [20] eingeführt.

Dimension von $\mathfrak{T}$; wir werden sie kürzer mit $[\mathfrak{T}]$ bezeichnen. Eine Menge $\mathfrak{L}$ von Elementen aus $\mathfrak{T}$ soll eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$ heissen, wenn $\mathfrak{L}$ ein maximales System von über $\mathfrak{U}$ linear unabhängigen Elementen aus $\mathfrak{T}$ ist, d.h. wenn die Elemente von $\mathfrak{L}$ linear unabhängig über $\mathfrak{U}$ sind, das Entsprechende jedoch für keine echte Obermenge von $\mathfrak{L}$ gilt[2]. Man sieht leicht, dass eine Menge $\mathfrak{L}$ genau dann eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$ ist, wenn ihre Elemente über $\mathfrak{U}$ linear unabhängig sind und jedes $s \in \mathfrak{T}$ in der Form

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i + u$$

mit $u \in \mathfrak{U}$ und endlich vielen Elementen $b_1, \ldots, b_n$ aus $\mathfrak{L}$ (die von s abhängen) dargestellt werden kann. Diese Darstellung von s ist offenbar eindeutig.

Durch Schlüsse, die den entsprechenden Schlüssen der Analytischen Geometrie analog sind, zeigt man leicht, dass jede Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$ die gleiche Zahl von Elementen besitzt und dass diese Zahl mit $[\mathfrak{T} - \mathfrak{U}]$ übereinstimmt.

Zu jedem linearen Untersystem $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{T}$ gibt es eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$. Das ist trivial, falls $[\mathfrak{T} - \mathfrak{U}] < \infty$. Ist $[\mathfrak{T} - \mathfrak{U}] = \infty$, so kann man $\mathfrak{T}$ wohlordnen und durch transfinite Induktion die Existenz eines maximalen Systems von über $\mathfrak{U}$ linear unabhängigen Elementen aus $\mathfrak{T}$, d.h. einer Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$ beweisen. In dieser Arbeit werden wir es hauptsächlich mit endlichen Basen zu tun haben, so dass wir die Anwendung des Wohlordnungssatzes meist vermeiden können.

Ist $\mathfrak{V}$ neben $\mathfrak{U}$ ein lineares Untersystem von $\mathfrak{T}$, so sind n Elemente $v_1, \ldots, v_n$ aus $\mathfrak{V}$ ersichtlich genau dann über $\mathfrak{U}$

[2] Eine Basis von $\mathfrak{T}$ über 0 nennen wir wie üblich einfach Basis von $\mathfrak{T}$.

linear unabhängig, wenn sie über dem linearen Untersystem $\mathfrak{d} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$ von $\mathfrak{V}$ linear unabhängig sind. Diese Bemerkung legt es nahe, über den bisherigen Dimensions- und Basisbegriff hinausgehend den Begriff der Dimension von $\mathfrak{V}$ über $\mathfrak{U}$ und der Basis von $\mathfrak{V}$ über $\mathfrak{U}$ zu erklären, nämlich als Dimension von $\mathfrak{V}$ über $\mathfrak{d}$ bzw. als Basis von $\mathfrak{V}$ über $\mathfrak{d}$. Unsere Ergebnisse über Dimensionen und Basen von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$ übertragen sich in evidenter Weise auf diese neuen Begriffe.

Ist $\mathfrak{x}$ eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$ und bedeutet $\mathfrak{Z}$ die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus $\mathfrak{x}$, so ist $\mathfrak{Z}$ ein lineares System und

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{U} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{U} = 0 ,$$

d.h. $\mathfrak{Z}$ ist ein Komplement zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{T}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{Z}$ ein Komplement zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{T}$, so ist jede Basis von $\mathfrak{Z}$ eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$, daher ist $[\mathfrak{Z}] = [\mathfrak{T} - \mathfrak{U}]$. Da wir dieses Ergebnis häufig benötigen werden, wollen wir es als einen Hilfssatz formulieren:

Hilfssatz 1: Zu jedem linearen Untersystem $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{T}$ gibt es in $\mathfrak{T}$ ein Komplement $\mathfrak{Z}$, und für jedes derartige Komplement $\mathfrak{Z}$ ist $[\mathfrak{Z}] = [\mathfrak{T} - \mathfrak{U}]$. Jede Basis von $\mathfrak{Z}$ ist eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$, und umgekehrt spannt jede Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}$ ein Komplement zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{T}$ auf.

Ein lineares Untersystem $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{T}$ bewirkt in bekannter Weise eine Einteilung der Elemente von $\mathfrak{T}$ in Restklassen modulo $\mathfrak{U}$ [3]. Bezeichnen wir die Restklasse eines Elementes s mit $\bar{s}$, so wird die Menge der Restklassen modulo $\mathfrak{U}$ durch die Verknüpfungsdefinitionen

$$\bar{s}_1 + \bar{s}_2 = \overline{(s_1 + s_2)} , \quad \alpha\bar{s} = \overline{\alpha s}$$

[3] Zwei Elemente s,s' gehören genau dann zur gleichen Restklasse modulo $\mathfrak{U}$, wenn $s - s' \in \mathfrak{U}$.

zu einem linearen System, dem Faktorsystem $\mathfrak{r}/\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{r}$ nach $\mathfrak{u}$. Man sieht leicht, dass n Elemente $s_1,\ldots,s_n$ aus $\mathfrak{r}$ genau dann über $\mathfrak{u}$ linear unabhängig sind, wenn die zugehörigen Restklassen $\bar{s}_1,\ldots\bar{s}_n$ im gewöhnlichen Sinne linear unabhängig sind. Daraus folgt $[\mathfrak{r} - \mathfrak{u}] = [\mathfrak{r}/\mathfrak{u}]$.

Hilfssatz 2: Sind $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$ lineare Untersysteme von $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{u}_1 \supseteq \mathfrak{u}_2$, so ist

$$[\mathfrak{r} - \mathfrak{u}_2] = [\mathfrak{r} - \mathfrak{u}_1] + [\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2].$$

Beweis: Wir setzen $[\mathfrak{r} - \mathfrak{u}_1] = q$, $[\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2] = r$ und nehmen $q < \infty$, $r < \infty$ an, da sonst die Behauptung trivial ist. $f_1,\ldots,f_q$ sei eine Basis von $\mathfrak{r}$ über $\mathfrak{u}_1$, $g_1,\ldots,g_r$ eine Basis von $\mathfrak{u}_1$ über $\mathfrak{u}_2$. Man sieht leicht, dass die Elemente $f_1,\ldots,f_q,g_1,\ldots,g_r$ über $\mathfrak{u}_2$ linear unabhängig sind. Ist $s \in \mathfrak{r}$, so gibt es für s eine Darstellung

$$s = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i f_i + u_1 \quad \text{mit } u_1 \in \mathfrak{u}_1 ,$$

für u_1 eine Darstellung

$$u_1 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k g_k + u_2 \quad \text{mit } u_2 \in \mathfrak{u}_2 .$$

Daher lässt sich s in der Form

$$s = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i f_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k g_k + u_2 \quad \text{mit } u_2 \in \mathfrak{u}_2$$

darstellen. Die Elemente $f_1,\ldots,f_q,g_1,\ldots,g_r$ bilden also eine Basis von $\mathfrak{r}$ über $\mathfrak{u}_2$ und daher ist, wie behauptet, $[\mathfrak{r} - \mathfrak{u}_2] = q+r$.

Hilfssatz 3: Sind $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$ lineare Untersysteme von $\mathfrak{r}$, ist $\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{o}$, so ist

$$[\mathfrak{r} - \mathfrak{o}] = [\mathfrak{r} - \mathfrak{u}_1] + [\mathfrak{r} - \mathfrak{u}_2].$$

Beweis: Es sei $[\mathfrak{r} - \mathfrak{u}_i] = n_i$ für i = 1,2 und $[\mathfrak{r} - \mathfrak{o}] = n$. Wegen $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{u}_i$ ist nach Hilfssatz 2

(1) $\qquad n = n_1 + [\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{o}]$ bzw. $n = n_2 + [\mathfrak{u}_2 - \mathfrak{o}]$.

Daher ist die Behauptung trivial, wenn eine der Dimensionen n_i unendlich ist. Für das weitere seien n_1 und n_2 endlich. Wegen

der ersten Gleichung in (1) genügt es zu zeigen, dass $[\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{o}] = n_2$ ist.

Es sei $g_1, \ldots, g_{n_2}$ eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}_2$. Wegen $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$ hat jedes Element g_i eine Darstellung

$$g_i = u_i^1 + u_i^2 \quad \text{mit } u_i^1 \in \mathfrak{U}_1 \quad , \; u_i^2 \in \mathfrak{U}_2 \; .$$

Man sieht leicht, dass die u_i^1 $(i = 1, \ldots, n_2)$ eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{U}_2$ bilden. Jedes Element $u^1 \in \mathfrak{U}_1$ besitzt daher eine Darstellung

$$u^1 = \sum_1^{n_2} \alpha_i u_i^1 + u^2 \quad \text{mit } u^2 \in \mathfrak{U}_2 \; .$$

Da die u_i^1 in $\mathfrak{U}_1$ liegen, folgt daraus, dass auch u^2 in $\mathfrak{U}_1$, also in $\mathfrak{o}$ liegt. Die u_i^1 bilden also eine Basis von $\mathfrak{U}_1$ über $\mathfrak{o}$, wenn sie über $\mathfrak{o}$ linear unabhängig sind. Das ist in der Tat der Fall, da $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{U}_2$ ist und die u_i^1 bereits über $\mathfrak{U}_1$ linear unabhängig sind.

Wegen dieser Basiseigenschaft der u_i^1 ist $|\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{o}| = n_2$ und damit nach unserer Vorbemerkung der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Ist $\mathfrak{U}$ ein lineares Untersystem von $\mathfrak{T}$, so nennen wir die Abbildung T eine <u>lineare Transformation</u> (oder lineare Abbildung) mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{U}$, wenn T jedem $u \in \mathfrak{U}$ ein Element Tu aus $\mathfrak{T}$ so zuordnet, dass

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T u_1 + \alpha_2 T u_2$$

für beliebige $u_i \in \mathfrak{U}$ und komplexe Zahlen α_i. Wie üblich bedeute I die identische Transformation, die jedes $u \in \mathfrak{U}$ auf sich abbildet, O die Nulltransformation, die jedes $u \in \mathfrak{U}$ auf das Nullelement abbildet. Als <u>Bildbereich</u> von T bezeichnen wir die Menge der $s \in \mathfrak{T}$, die sich in der Form $s = Tu$ mit $u \in \mathfrak{U}$ darstellen lassen, als <u>Kern</u> von T die Menge der $u \in \mathfrak{U}$ mit $Tu = 0$. Kern

bzw. Bildbereich von T kürzen wir durch $\mathfrak{N}(T)$ bzw. $\mathfrak{B}(T)$ ab; statt $\mathfrak{B}(T)$ schreiben wir auch häufig $T\mathfrak{U}$, und entsprechend bezeichnen wir mit $T\mathfrak{M}$ das Bild einer (nicht notwendig linearen) Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{U}$ bei Anwendung der Transformation T, also die Menge der Elemente Tm, wobei m die Menge $\mathfrak{M}$ durchläuft. $\mathfrak{N}(T)$ und $\mathfrak{B}(T)$ sind ersichtlich lineare Systeme.

Die Dimension von $\mathfrak{N}(T)$ nennen wir Nulldefekt von T, die Dimension von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{B}(T)$ den Bilddefekt von T und bezeichnen diese Dimensionen mit $\nu(T)$ bzw. $\beta(T)$. Die Dimension von $\mathfrak{B}(T)$ selbst nennen wir den Rang von T. Ist $[\mathfrak{B}(T)] < \infty$, so soll T eine lineare Transformation von endlichem Rang heissen.

Ist $\nu(T) = 0$, d.h. besteht $\mathfrak{N}(T)$ nur aus dem Nullelement, so bildet T das System $\mathfrak{U}$ eineindeutig auf $\mathfrak{B}(T)$ ab. T besitzt dann eine Umkehrabbildung, die auf $\mathfrak{B}(T)$ definiert ist und jedem $Tu \in \mathfrak{B}(T)$ das eindeutig bestimmte Element u zuordnet. Wir bezeichnen sie wie üblich mit T^{-1} und nennen sie die Inverse zu T. Die Inverse ist eine lineare Abbildung von $\mathfrak{B}(T)$ auf $\mathfrak{U}$. Genau dann ist T^{-1} auf ganz $\mathfrak{T}$ definiert, wenn $\beta(T) = 0$ ist.

Ist $\mathfrak{V}$ ein lineares Untersystem von $\mathfrak{U}$, so nennen wir die lineare Transformation T', die auf $\mathfrak{V}$ definiert ist und dort mit T übereinstimmt, die Einschränkung von T auf $\mathfrak{V}$. Umgekehrt nennen wir T eine Erweiterung von T'.

Wir werden uns fast ausschliesslich mit linearen Transformationen T beschäftigen, die auf ganz $\mathfrak{T}$ definiert sind, die also ihren Definitionsbereich in sich abbilden. Allgemein wollen wir lineare Transformationen, die ihren Definitionsbereich in sich abbilden, Operatoren dieses Definitionsbereiches nennen. Zu einem Operator T kann man für jedes $n = 1,2,\ldots$ den n-fach iterierten Operator T^n bilden.

Hilfssatz 4: Bildet der Operator T das lineare System $\mathfrak{T}$ eineindeutig auf sich ab und ist $\mathfrak{U}$ ein lineares Untersystem von $\mathfrak{T}$, so ist

$$[\mathfrak{T} - T\mathfrak{U}] = [\mathfrak{T} - \mathfrak{U}].$$

Beweis: Nach Hilfssatz 1 gibt es ein lineares System $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{T}$ so dass

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{L} + \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{L} \cap \mathfrak{U} = 0 \quad \text{und} \quad [\mathfrak{T} - \mathfrak{U}] = [\mathfrak{L}]$$

ist. Da T das System $\mathfrak{T}$ auf sich abbildet, folgt aus dieser Zerlegung die weitere Zerlegung $\mathfrak{T} = T\mathfrak{T} = T\mathfrak{L} + T\mathfrak{U}$,

und da T eineindeutig ist, ist mit $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{U} = 0$ auch $T\mathfrak{L} \cap T\mathfrak{U} = 0$. $T\mathfrak{L}$ ist daher ein Komplement zu $T\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{T}$, nach Hilfssatz 1 ist also $[\mathfrak{T} - T\mathfrak{U}] = [T\mathfrak{L}]$. Da wegen der Eineindeutigkeit von T trivialerweise $[T\mathfrak{L}] = [\mathfrak{L}]$ ist, gilt somit die Gleichung

$$[\mathfrak{T} - T\mathfrak{U}] = [\mathfrak{L}] = [\mathfrak{T} - \mathfrak{U}].$$

Corollar 1: Ist $T = RS$ das Produkt zweier Operatoren R, S auf $\mathfrak{T}$ und ist $\nu(R) = \beta(R) = 0$, so ist

$$\nu(T) = \nu(S) \text{ und } \beta(T) = \beta(S).$$

Beweis: Da R eineindeutig ist, stimmen die Kerne von T und S überein, erst recht ist also $\nu(T) = \nu(S)$. Wegen $\mathfrak{B}(T) = R\,\mathfrak{B}(S)$ und $\nu(R) = \beta(R) = 0$ ist nach Hilfssatz 4

$$[\mathfrak{T} - \mathfrak{B}(S)] = [\mathfrak{T} - R\mathfrak{B}(S)] = [\mathfrak{T} - \mathfrak{B}(T)],$$

also $\beta(S) = \beta(T)$.

Wir werden uns zunächst nur mit dem Kern und Bildbereich eines Operators T und seiner Iterierten T^n beschäftigen und wollen so lange statt $\mathfrak{K}(T^n)$ bzw. $\mathfrak{B}(T^n)$ die kürzeren Bezeichnungen $\mathfrak{K}_n$ bzw. $\mathfrak{B}_n$ benützen.

Ersichtlich ist $0 = \mathfrak{K}_0 \leq \mathfrak{K}_1 \leq \mathfrak{K}_2 \leq \cdots$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{L}_0 \geq \mathfrak{L}_1 \geq \mathfrak{L}_2 \geq \cdots$. Wir wollen sagen, dass T die 1. Kettenbedingung (mit der Ketten-

länge p) erfüllt, wenn

(2) $0 = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{p-1} \subset \mathfrak{k}_p = \mathfrak{k}_{p+1}$

ist; es ist dann von selbst $\mathfrak{k}_p = \mathfrak{k}_{p+\tau}$ für $\tau = 1,2,\ldots$. Ferner wollen wir sagen, dass T die 2. Kettenbedingung (mit der Kettenlänge q) erfüllt, wenn

(3) $T = \mathfrak{l}_0 \supset \mathfrak{l}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{l}_{q-1} \supset \mathfrak{l}_q = \mathfrak{l}_{q+1}$

ist; es ist dann von selbst $\mathfrak{l}_q = \mathfrak{l}_{q+\tau}$ für $\tau = 1,2,\ldots$. Diese Begriffsbildungen werden durch die Rieszsche Theorie der vollstetigen Operatoren nahegelegt.[4)]

Ueber die Natur der Kettenbedingungen sollen uns einige Bemerkungen aufklären, die wir als Hilfssätze formulieren. Zum Teil sprechen diese Hilfssätze nur explizit Ergebnisse aus, die implizit schon in der Literatur zu finden sind. Wir werden gegebenenfalls darauf hinweisen.

Hilfssatz 5: Besitzt $\nu(T^n)$ bzw. $\beta(T^n)$ eine von n unabhängige obere Schranke $N < \infty$, so erfüllt T die erste bzw. die zweite Kettenbedingung. Ist $\beta(T^n)$ für eine natürliche Zahl n endlich, so ist $\beta(T^n)$ für jedes natürliche n endlich.

Beweis: Es sei $\nu(T^n) \leq N$ für jedes natürliche n. Dann besteht jede Basis von $\mathfrak{k}_n$ aus $\nu(T^n) \leq N$ Elementen, und wegen $\mathfrak{k}_n \subseteq \mathfrak{k}_{n+1}$ ist $\nu(T^n) \leq \nu(T^{n+1})$, und sogar $\nu(T^n) < \nu(T^{n+1})$, wenn $\mathfrak{k}_n \subset \mathfrak{k}_{n+1}$ ist. Daraus folgt, dass in der Kette (2) nach endlich vielen Schritten $\mathfrak{k}_m = \mathfrak{k}_{m+1}$ sein muss, d.h. dass T die 1. Kettenbedingung erfüllt. Entsprechend ergibt sich die Behauptung über die 2. Kettenbedingung, da $\beta(T^n) < \beta(T^{n+1})$ ist, wenn $\mathfrak{l}_n \supset \mathfrak{l}_{n+1}$ gilt. Ist $\beta(T^n)$ für eine natürliche Zahl n endlich, so ist wegen $\mathfrak{l}_1 \supseteq \mathfrak{l}_n$, also $\beta(T) \leq \beta(T^n)$ erst recht $\beta(T)$ endlich. Nach Hilfssatz 1 gibt es ein System $\mathfrak{L}$, so dass

4) Siehe F. Riesz [13].

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{X} + \mathfrak{k}_1 , \quad \mathfrak{X} \cap \mathfrak{k}_1 = 0 \quad \text{und} \quad [\mathfrak{X}] = \beta(T)$$

ist. Wendet man auf diese Zerlegung den Operator T^m an, so folgt

$$\mathfrak{k}_m = T^m\mathfrak{X} + \mathfrak{k}_{m+1} , \quad m = 0,1,\cdots ,$$

und daraus ergibt sich $\mathfrak{T} = \mathfrak{X} + T\mathfrak{X} + \cdots + T^m\mathfrak{X} + \mathfrak{k}_{m+1} = \mathfrak{X}' + \mathfrak{k}_{m+1}$, wenn $\mathfrak{X} + T\mathfrak{X} + \cdots + T^m\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'$ gesetzt wird. Wegen $[T^\alpha\mathfrak{X}] \leq [\mathfrak{X}]$ ist $[\mathfrak{X}'] \leq (m+1)[\mathfrak{X}] = (m+1)\cdot\beta(T)$. Wegen $\mathfrak{T} = \mathfrak{X}' + \mathfrak{k}_{m+1}$ ist eine Basis von $\mathfrak{X}'$ über $\mathfrak{k}_{m+1}$ gleichzeitig eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{k}_{m+1}$ und daraus folgt zusammen mit der letzten Abschätzung, dass

$$\beta(T^{m+1}) = [\mathfrak{T} - \mathfrak{k}_{m+1}] \leq [\mathfrak{X}'] \leq (m+1)\cdot\beta(T) < \infty$$

ist für $m = 0,1,\ldots$. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Hilfssatz 6: Der Operator T auf $\mathfrak{T}$ erfüllt genau dann die 1. Kettenbedingung mit einer Kettenlänge $p \leq \varrho$, wenn $\mathfrak{k}(T^\tau) \cap \mathfrak{k}(T^\varrho) = 0$ ist, wobei τ eine beliebige natürliche Zahl sein darf. T erfüllt genau dann die 2. Kettenbedingung mit einer Kettenlänge $q \leq \tau$, wenn es in $\mathfrak{T}$ ein Komplement $\mathfrak{X}_\tau$ zu $\mathfrak{k}(T^\tau)$ gibt, das in $\mathfrak{k}(T^\tau)$ enthalten ist; dabei darf τ eine beliebige natürliche Zahl sein.

Beweis: Erfüllt T die 1. Kettenbedingung mit der Kettenlänge p, so folgt aus $s' = T^p s$ und $T^\tau s' = 0$, dass $T^{p+\tau}s = 0$ ist. Wegen $\mathfrak{k}_p = \mathfrak{k}_{p+\tau}$ ist daher auch $T^p s = s' = 0$, d.h. es ist $\mathfrak{k}_\tau \cap \mathfrak{k}_p = 0$, und wegen $\mathfrak{k}_\varrho \supseteq \mathfrak{k}_{\varrho+\mu}$ ist erst recht $\mathfrak{k}_\tau \cap \mathfrak{k}_\varrho = 0$ für $\varrho \geq p$. Ist umgekehrt $\mathfrak{k}_\tau \cap \mathfrak{k}_\varrho = 0$ für zwei natürliche Zahlen τ und ϱ, so ist wegen $\mathfrak{k}_1 \subseteq \mathfrak{k}_\tau$ erst recht $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_\varrho = 0$. Ist nun $k \in \mathfrak{k}_{\varrho+1}$, so ist $T(T^\varrho k) = 0$, d.h. $T^\varrho k \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_\varrho = 0$, also auch $T^\varrho k = 0$ und somit $\mathfrak{k}_\varrho = \mathfrak{k}_{\varrho+1}$. T erfüllt also die 1. Kettenbedingung mit einer Kettenlänge $p \leq \varrho$. Damit ist der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen.

Nun erfülle T die zweite Kettenbedingung mit der Ketten-

länge q. Nach Hilfssatz 1 gibt es zu $\mathfrak{k}_r$ ein Komplement $\mathfrak{L}'$, so dass

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{L}' + \mathfrak{k}_r \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}' \cap \mathfrak{k}_r = 0 \qquad (r = 1,2,\dots)$$

ist. Wendet man auf diese Zerlegung den Operator T^q an, so erhält man

$$T^q\mathfrak{T} = \mathfrak{k}_q = T^q\mathfrak{L}' + \mathfrak{k}_{q+r}.$$

Wegen $\mathfrak{k}_q = \mathfrak{k}_{q+r}$ folgt daraus $T^q\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{k}_{q+r}$. Zu jedem $c' \in \mathfrak{L}'$ gibt es daher ein $s \in \mathfrak{T}$, so dass $T^q c' = T^{q+r}s$ ist. Wird $c = c' - T^r s$ gesetzt, so ist

$$T^{q+r}s = T^q c' = T^q c + T^{q+r}s,$$

also $T^q c = 0$, d.h. $c \in \mathfrak{k}_q$. Bilden die Elemente c_ι', wobei ι eine Indexmenge $\mathfrak{J}$ durchläuft, eine Basis von $\mathfrak{L}'$, nach Hilfssatz 1 also eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{k}_r$, so bilden, wie man leicht sieht, auch die Elemente c_ι, die nach der obigen Vorschrift aus den c_ι' gebildet werden, eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{k}_r$. Das von diesen Elementen c_ι ($\iota \in \mathfrak{J}$) aufgespannte lineare System $\mathfrak{L}_r$ hat nun die gewünschten Eigenschaften: es ist nach Hilfssatz 1 ein Komplement in $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{k}_r$ und liegt in $\mathfrak{k}_q$, wegen $\mathfrak{k}_q \subseteq \mathfrak{k}_r$ für $q \leq r$ also erst recht in $\mathfrak{k}_r$. Gibt es umgekehrt zu $\mathfrak{k}_r$ in $\mathfrak{T}$ ein Komplement $\mathfrak{L}_r$, das in $\mathfrak{k}_s$ liegt, wobei r und s zwei natürliche Zahlen sind, so folgt aus $\mathfrak{T} = \mathfrak{L}_r + \mathfrak{k}_r$ durch Anwendung des Operators T^s die Zerlegung

$$T^s\mathfrak{T} = \mathfrak{k}_s = T^s\mathfrak{L}_r + \mathfrak{k}_{s+r} = \mathfrak{k}_{s+r}.$$

Wegen $\mathfrak{k}_s \supseteq \mathfrak{k}_{s+1} \supseteq \mathfrak{k}_{s+r} = \mathfrak{k}_s$ ist also $\mathfrak{k}_s = \mathfrak{k}_{s+1}$, d.h. T erfüllt die zweite Kettenbedingung mit einer Kettenlänge $q \leq r$. Damit ist auch der zweite Teil des Hilfssatzes bewiesen.

Hilfssatz 7: Erfüllt der Operator T auf $\mathfrak{T}$ beide Kettenbedingungen, so sind die beiden Kettenlängen gleich.[5)]

Beweis: Es sei p die erste, q die zweite Kettenlänge. Nach

[5)] Dieser Satz geht auf F. Riesz [13] zurück.

Hilfssatz 6 gibt es eine Zerlegung

(4) $\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}_r + \mathfrak{X}_r$ mit $\mathfrak{X}_r \subseteq \mathfrak{K}_q$ für $r = 1,2,\ldots,$

und es ist

(5) $\mathfrak{Z}_p \cap \mathfrak{K}_r = 0$ für $r = 1,2,\ldots$.

Aus (4) folgt

(6) $\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}_r + \mathfrak{K}_q$,

insbesondere also

(7) $\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}_p + \mathfrak{K}_q$, und nach (5) $\mathfrak{Z}_p \cap \mathfrak{K}_q = 0$.

Ist $q < p$, so ist $\mathfrak{K}_q \subseteq \mathfrak{K}_p$, nach (7) ist also

(8) $\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}_p + \mathfrak{K}_p$ und nach (5) $\mathfrak{Z}_p \cap \mathfrak{K}_p = 0$.

Da aber sogar $\mathfrak{K}_q \subset \mathfrak{K}_p$ ist, widersprechen sich (7) und (8), und daher ist $p \leq q$. Wäre $p < q$, so würde wegen $\mathfrak{Z}_p \supseteq \mathfrak{Z}_q$ aus (5) die Gleichung $\mathfrak{Z}_q \cap \mathfrak{K}_q = 0$ folgen. Zusammen mit der aus (6) folgenden Gleichung $\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}_q + \mathfrak{K}_q$ ist dies ein Widerspruch zu (7), da $\mathfrak{Z}_p \supset \mathfrak{Z}_q$ ist. Daher ist $p = q$.

Hilfssatz 8: Genau dann erfüllt der Operator T die beiden Kettenbedingungen mit gemeinsamer Kettenlänge $p \leq r$, wenn die Zerlegung

(9) $\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}(T^r) + \mathfrak{K}(T^r)$ mit $\mathfrak{Z}(T^r) \cap \mathfrak{K}(T^r) = 0$

besteht. Gilt (9), so bildet T das System $\mathfrak{Z}(T^r)$ eineindeutig auf sich ab; ist ausserdem $\beta(T) < \infty$, so ist $\nu(T^n) < \infty$ für $n = 0,1,\ldots$.[6)]

Beweis: Sind beide Kettenbedingungen erfüllt, so haben nach Hilfssatz 7 beide Kettenlängen den gleichen Wert p, und aus (7) folgt die Zerlegung

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{Z}_p + \mathfrak{K}_p \quad \text{mit} \quad \mathfrak{Z}_p \cap \mathfrak{K}_p = 0.$$

Da für $r \geq p$

$$\mathfrak{Z}_r = \mathfrak{Z}_p \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_r = \mathfrak{K}_p$$

gilt, folgt aus dieser Zerlegung trivialerweise (9).

6) Auch dieser Hilfssatz ist im wesentlichen ein Satz aus der Theorie der vollstetigen Operatoren von F.Riesz. Siehe Riesz [13].

nun sei umgekehrt (9) erfüllt. Aus $\mathfrak{k}_r \cap \mathfrak{K}_r = 0$ folgt nach Hilfssatz 6, dass T die 1. Kettenbedingung mit einer Kettenlänge $p \leq r$ erfüllt. Wendet man auf $\mathfrak{r} = \mathfrak{k}_r + \mathfrak{K}_r$ den Operator T^r an, so folgt $\mathfrak{k}_r = \mathfrak{k}_{2r}$. T erfüllt also auch die 2. Kettenbedingung, und nach Hilfssatz 7 ist die 2. Kettenlänge gleich p.
Damit sind die Aussagen über die Kettenbedingungen bewiesen.

Besteht die Zerlegung (9), so ist $\mathfrak{k}_r \cap \mathfrak{K}_1 = 0$, weil $\mathfrak{k}_r \cap \mathfrak{K}_r = 0$ und $\mathfrak{K}_1 \leq \mathfrak{K}_r$ ist. Die Einschränkung T' von T auf $\mathfrak{k}_r$ ist also eineindeutig. Da nach dem bisher Bewiesenen T die Kettenbedingungen mit einer Kettenlänge $p \leq r$ erfüllt, ist $\mathfrak{k}_r = \mathfrak{k}_{r+1}$, d.h. T' bildet $\mathfrak{k}_r$ auf sich ab. Ist ausserdem $\beta(T) < \infty$, so ist nach Hilfssatz 5 auch $\beta(T^r) < \infty$. Da $\mathfrak{K}_r$ nach (9) ein Komplement in $\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{k}_r$ ist, ist nach Hilfssatz 1

$$\nu(T^r) = [\mathfrak{K}_r] = [\mathfrak{r} - \mathfrak{k}_r] = \beta(T^r),$$

also ist $\nu(T^r) < \infty$. Wegen $\mathfrak{K}_n \leq \mathfrak{K}_r$ für $n \geq 0$ ist $\nu(T^n) \leq \nu(T^r)$, also ist auch $\nu(T^n) < \infty$.

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Ist $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ein Polynom in der komplex n Veränderlichen z und T ein Operator auf $\mathfrak{r}$, so verstehen wir unter f(T) wie üblich den Operator

$$f(T) = a_0 I + \ldots + a_n T^n .$$

Ist $s(z) = f_1(z) + f_2(z)$ die Summe, $p(z) = f_1(z) f_2(z)$ das Produkt der Polynome $f_1(z)$, $f_2(z)$, so ist

$$s(T) = f_1(T) + f_2(T),$$
$$p(T) = f_1(T) f_2(T) = f_2(T) f_1(T),$$

d.h. die Zuordnung $f(z) \longrightarrow f(T)$ ist ein Homomorphismus, und die Polynome f(T)(mit demselben Operator T!) bilden einen kommutativen Ring. Wir wollen hier zwei Hilfssätze über

solche Operatorpolynome aussprechen. Der erste entspricht dem aus der Matrizentheorie bekannten Weyrschen Lemma, der zweite ist ein duales Gegenstück dazu.

Hilfssatz 9: Sind $f_1(z),\dots,f_r(z)$ paarweise teilerfremde Polynome, ist $f(z) = f_1(z)\cdots f_r(z)$ und sind $\mathfrak{k}_f$ bzw. $\mathfrak{k}_{f_\varrho}$ die Kerne von $f(T)$ bzw. $f_\varrho(T)$, so ist

(10) $\mathfrak{k}_f = \mathfrak{k}_{f_1} + \cdots + \mathfrak{k}_{f_r}$,

(11) $(\mathfrak{k}_{f_1} + \cdots + \mathfrak{k}_{f_\varrho}) \cap \mathfrak{k}_{f_{\varrho+1}} = 0$ für $\varrho = 1,\dots r-1$, und

(12) $[\mathfrak{k}_f] = \sum_{\varrho=1}^{r} [\mathfrak{k}_{f_\varrho}]$.

Wir beweisen den Satz zuerst für $r = 2$. Ist $k_1 \in \mathfrak{k}_{f_1}$, also $f_1(T)k_1 = 0$, so ist $f(T)k_1 = f_2(T)f_1(T)k_1 = 0$, also $k_1 \in \mathfrak{k}_f$. Ebenso folgt aus $k_2 \in \mathfrak{k}_{f_2}$, dass $k_2 \in \mathfrak{k}_f$. Da $\mathfrak{k}_f$ ein lineares System ist, gilt also $\mathfrak{k}_{f_1} + \mathfrak{k}_{f_2} \subseteq \mathfrak{k}_f$. Die umgekehrte Ungleichung ergibt sich so. Weil $f_1(z)$ und $f_2(z)$ teilerfremd sind, gibt es zwei Polynome $p_1(z)$ und $p_2(z)$, so dass

$$1 = p_1(z)f_1(z) + p_2(z)f_2(z), \text{ also}$$

$$I = p_1(T)f_1(T) + p_2(T)f_2(T)$$

ist. Jedes Element aus $\mathfrak{r}$, insbesondere jedes Element s aus $\mathfrak{k}_f$ lässt sich also in der Form

(13) $s = p_1(T)f_1(T)s + p_2(T)f_2(T)s$

darstellen. Wegen $f_1(T)f_2(T)s = f_2(T)f_1(T)s = f(T)s = 0$ gehört $f_1(T)s$ zu $\mathfrak{k}_{f_2}$, $f_2(T)s$ zu $\mathfrak{k}_{f_1}$, und da jedes Polynom in T sowohl $\mathfrak{k}_{f_1}$ als auch $\mathfrak{k}_{f_2}$ in sich abbildet, liegt auch das Element $p_1(T)f_1(T)s = s_2$ in $\mathfrak{k}_{f_2}$ und das Element $p_2(T)f_2(T)s = s_1$ in $\mathfrak{k}_{f_1}$. Jedes $s \in \mathfrak{k}_f$ kann also in eine Summe

$$s = s_1 + s_2 \quad \text{mit } s_i \in \mathfrak{k}_{f_i}$$

zerlegt werden, also ist $\mathfrak{k}_f \subseteq \mathfrak{k}_{f_1} + \mathfrak{k}_{f_2}$. Damit ist die Gleichung $\mathfrak{k}_f = \mathfrak{k}_{f_1} + \mathfrak{k}_{f_2}$ bewiesen.

Liegt s in $\mathfrak{k}_{f_1} \cap \mathfrak{k}_{f_2}$, ist also $f_1(T)s = f_2(T)s = 0$, so

folgt aus (13), dass $s = 0$ ist, womit auch die Gleichung $\mathfrak{k}_{f_1} \cap \mathfrak{k}_{f_2} = 0$ bewiesen ist.

In dem linearen System $\mathfrak{k}_f = \mathfrak{k}_{f_1} + \mathfrak{k}_{f_2}$ ist wegen $\mathfrak{k}_{f_1} \cap \mathfrak{k}_{f_2} = 0$ das System $\mathfrak{k}_{f_1}$ ein Komplement zu $\mathfrak{k}_{f_2}$, und nach Hilfssatz 1 ist daher $[\mathfrak{k}_f - \mathfrak{k}_{f_2}] = [\mathfrak{k}_{f_1}]$. Nach Hilfssatz 2 folgt daraus

$$[\mathfrak{k}_f] = [\mathfrak{k}_f - 0] = [\mathfrak{k}_f - \mathfrak{k}_{f_2}] + [\mathfrak{k}_{f_2} - 0] = [\mathfrak{k}_{f_1}] + [\mathfrak{k}_{f_2}].$$

Damit ist auch die Dimensionsbehauptung bewiesen.

Für $r > 2$ ergibt sich der Hilfssatz nun durch vollständige Induktion. Man braucht nur zu beachten, dass für $\varrho \geq 1$ die Polynome $f_1(z) \cdots f_\varrho(z)$ und $f_{\varrho+1}(z)$ teilerfremd sind, weil die $f_i(z)$ paarweise teilerfremd sind.

Hilfssatz 10: Sind $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ paarweise teilerfremde Polynome, ist $f(z) = f_1(z) \cdots f_r(z)$ und sind $\mathfrak{b}_f$ bzw. $\mathfrak{b}_{f_\varrho}$ die Bildbereiche von $f(T)$ bzw. $f_\varrho(T)$, so ist

$$\mathfrak{b}_f = \bigcap_{\varrho=1}^{r} \mathfrak{b}_{f_\varrho} \tag{14}$$

$$\mathfrak{b}_{f_\nu} + \mathfrak{b}_{f_\mu} = \mathfrak{r} \qquad \text{für } 1 \leq \nu < \mu \leq r, \qquad \text{und} \tag{15}$$

$$[\mathfrak{r} - \mathfrak{b}_f] = \sum_{\varrho=1}^{r} [\mathfrak{r} - \mathfrak{b}_{f_\varrho}]. \tag{16}$$

Wir führen wieder den Beweis zuerst für den Fall $r = 2$. Trivialerweise ist $\mathfrak{b}_f \subseteq \mathfrak{b}_{f_1} \cap \mathfrak{b}_{f_2}$. Um (14) zu beweisen, genügt es also, die umgekehrte Ungleichung herzuleiten. Dazu benutzen wir, dass für ein beliebiges $s \in \mathfrak{r}$ die Zerlegung (13) gilt; denn diese Zerlegung folgt allein aus der Teilerfremdheit der Polynome $f_1(z)$, $f_2(z)$. Liegt s insbesondere in $\mathfrak{b}_{f_1} \cap \mathfrak{b}_{f_2}$, gibt es also zwei Elemente s_1, s_2 aus $\mathfrak{r}$, so dass

$$s = f_1(T)s_1 = f_2(T)s_2$$

ist, so nimmt (13) die Form an

$$\begin{aligned} s &= p_1(T)f_1(T)f_2(T)s_2 + p_2(T)f_2(T)f_1(T)s_1 \\ &= f_1(T)f_2(T)\left(p_1(T)s_2 + p_2(T)s_1\right) = f(T)s'. \end{aligned}$$

s liegt also in $\mathfrak{L}_f$, d.h. es ist in der Tat $\mathfrak{L}_{f_1} \cap \mathfrak{L}_{f_2} = \mathfrak{L}_f$.

Die Gleichung (15) folgt ebenfalls aus (13). Denn aus

$$s = p_1(T)f_1(T)s + p_2(T)f_2(T)s = f_1(T)p_1(T)s + f_2(T)p_2(T)s$$

ergibt sich, dass jedes $s \in \mathfrak{T}$ in der Form

$$s = s_1 + s_2 \text{ mit } s_\varrho \in \mathfrak{L}_{f_\varrho}$$

dargestellt werden kann, d.h. dass $\mathfrak{T} = \mathfrak{L}_{f_1} + \mathfrak{L}_{f_2}$ ist.

Die Dimensionsgleichung (16) folgt wegen (14) und (15) aus Hilfssatz 3.

Für $r > 2$ lässt sich (15) wie eben beweisen, (14) und (16) ergeben sich durch vollständige Induktion.

§2. Operatoren mit endlichen Defekten.

In diesem Paragraphen werden wir untersuchen, welche Verhältnisse herrschen, wenn wenigstens einer der Defekte des Operators T endlich ist. Genauer: Wir werden zuerst eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür herleiten, dass bei endlichem Nulldefekt die 1. Kettenbedingung erfüllt ist, dann werden wir die Grössenbeziehungen zwischen Null- und Bilddefekt des Operators T untersuchen unter der Voraussetzung, dass einer der Defekte endlich und eine der Kettenbedingungen erfüllt ist. Anschliessend werden wir Zerlegungssätze für Operatoren mit endlichen Defekten herleiten und dabei genaue Bedingungen dafür gewinnen, dass $\nu(T) = \beta(T) < \infty$ ist. Der Schluss des Paragraphen ist der Untersuchung der finiten und vollfiniten Operatoren gewidmet; die Definition dieser beiden Begriffe wird auf Seite 42 gegeben.

Satz 1: Ist $\nu(T)$ endlich, so erfüllt der Operator T auf $\mathfrak{T}$ genau dann die 1. Kettenbedingung, wenn jedes lineare Untersystem $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{T}$, das durch T auf sich abgebildet wird, sogar eineindeutig auf sich abgebildet wird.

Beweis: Wegen $T\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}$ ist die Einschränkung T' von T auf $\mathfrak{U}$ ein Operator auf $\mathfrak{U}$. Erfüllt T die 1. Kettenbedingung, so erfüllt auch T' die 1. Kettenbedingung, weil $\mathfrak{k}((T')^n) = \mathfrak{k}(T^n) \cap \mathfrak{U}$ für $n \geq 0$ ist. Wegen $T'\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ erfüllt T' die 2. Kettenbedingung mit der Kettenlänge $q = 0$. Nach Hilfssatz 7 ist daher auch die 1. Kettenlänge von T' gleich 0, d.h. es ist $\mathfrak{k}(T') = 0$, und das bedeutet, dass T' eineindeutig ist. Die Bedingung des Satzes ist also notwendig.

Um zu beweisen, dass sie auch hinreichend ist, benutzen wir den Hilfssatz 6. Nach ihm ist die 1. Kettenbedingung er-

füllt, wenn $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{b}_\varrho = 0$ ist für ein $\varrho \geq 0$. Wegen $\mathfrak{b}_\mu \supseteq \mathfrak{b}_{\mu+1}$ nehmen die Mengen $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{b}_\mu$ monoton ab, und jede dieser Mengen ist ein lineares System. Da $\mathfrak{k}_1$ wegen $\nu(T) < \infty$ nur endlich viele linear unabhängige Elemente enthält, gibt es ein $n \geq 0$, so dass

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{b}_{n+\mu}$$

für alle $\mu \geq 0$ dieselbe Menge ist. Es sei

$$\mathfrak{v} = \bigcap_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{b}_{n+\mu} \quad , \text{ also } \mathfrak{U} = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{v}.$$

$\mathfrak{v}$ ist ein lineares System und wird durch T in sich abgebildet; wir wollen zeigen, dass sogar $T\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$ ist. Dazu sei d ein beliebiges Element aus $\mathfrak{v}$. Dann gibt es Elemente s_μ aus $\mathfrak{r}$, so dass

$$d = T^{n+\mu} s_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 0,1,\ldots$$

ist. Daher ist

$$0 = T^{n+1} s_1 - T^{n+\mu} s_\mu = T(T^n s_1 - T^{n+\mu-1} s_\mu) \quad \text{für} \quad \mu \geq 1.$$

Wird

$$s'_\mu = T^n s_1 - T^{n+\mu-1} s_\mu = T^n (s_1 - T^{\mu-1} s_\mu) \text{ für } \mu \geq 1$$

gesetzt, so ist $Ts'_\mu = 0$, also $s'_\mu \in \mathfrak{k}_1$ und offenbar $s'_\mu \in \mathfrak{b}_n$, also $s'_\mu \in \mathfrak{U}$ und daher auch $s'_\mu \in \mathfrak{b}_{n+\mu-1}$ für $\mu \geq 1$. Ausserdem ist

$$T^n s_1 = s'_\mu + T^{n+\mu-1} s_\mu .$$

Beide Summanden der rechten Seite dieser Gleichung liegen in $\mathfrak{b}_{n+\mu-1}$, also liegt auch $T^n s_1$ in $\mathfrak{b}_{n+\mu-1}$ für jedes $\mu \geq 1$, d.h. $T^n s_1$ liegt in $\mathfrak{v}$. Da $T(T^n s_1) = d$ ist, bildet also T das lineare System $\mathfrak{v}$ <u>auf</u> sich ab. Nach der Voraussetzung muss daher $\mathfrak{v}$ durch T <u>eineindeutig</u> auf sich abgebildet werden. Das ist aber nicht möglich, wenn $\mathfrak{U} = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{v} \neq 0$ ist. Es ist also $\mathfrak{U} = 0$, d.h. $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{b}_n = 0$. Nach Hilfssatz 6 erfüllt daher T die 1. Kettenbedingung.

Satz 2: Wenigstens einer der Defekte $\nu(T)$, $\beta(T)$ des Operators T auf $\mathfrak{T}$ sei endlich. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Erfüllt T die 1. Kettenbedingung, so ist $\beta(T) \geq \nu(T)$.

(b) Erfüllt T die 2. Kettenbedingung, so ist $\beta(T) \leq \nu(T)$.

Wir beweisen zuerst (a). Die 1. Kettenlänge sei p. Nach Hilfssatz 6 ist dann $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{k}_p = 0$. Linear unabhängige Elemente $k_1, \ldots, k_n$ aus $\mathfrak{K}_1$ sind daher sogar linear unabhängig über $\mathfrak{k}_p$, d.h. es ist $\nu(T) \leq \beta(T^p)$. Ist nun $\beta(T)$ endlich, so ist nach Hilfssatz 5 auch $\beta(T^p)$, also auch $\nu(T)$ endlich. Ist $\beta(T)$ unendlich, so ist $\nu(T)$ nach Voraussetzung endlich. Im Falle (a) ist also $\nu(T)$ stets endlich.

Für $p = 0$ ist $\nu(T) = 0$ und trivialerweise $\beta(T) \geq \nu(T)$. Wir wollen weiterhin $p \geq 1$ annehmen. Es werde

$$\mathfrak{d}_\varkappa = \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{k}_\varkappa \qquad \text{für} \quad \varkappa = 0,1,\ldots,p$$

gesetzt, so dass $\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{K}_1$ und nach Hilfssatz 6 $\mathfrak{d}_{p-1} \supset \mathfrak{d}_p = 0$ ist. Nach Hilfssatz 2 ist

$$\nu(T) = [\mathfrak{K}_1] = \sum_{\varkappa=0}^{p-1} [\mathfrak{d}_\varkappa - \mathfrak{d}_{\varkappa+1}].$$

In $\mathfrak{d}_\varkappa$ gibt es $r_\varkappa = [\mathfrak{d}_\varkappa - \mathfrak{d}_{\varkappa+1}]$ Elemente $d_1^{(\varkappa)}, \ldots, d_{r_\varkappa}^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 0, \ldots, p-1)$, die über $\mathfrak{d}_{\varkappa+1}$ linear unabhängig sind. Ihre Gesamtzahl $\sum_0^{p-1} r_\varkappa$ ist $\nu(T)$. Da $\mathfrak{d}_\varkappa \subseteq \mathfrak{k}_\varkappa$ ist, gibt es zu jedem $d_\rho^{(\varkappa)}$ ein $s_\rho^{(\varkappa)} \in \mathfrak{T}$ mit $T^\varkappa s_\rho^{(\varkappa)} = d_\rho^{(\varkappa)}$. Die Behauptung $\beta(T) \geq \nu(T)$ ist richtig, wenn die Elemente $s_\rho^{(\varkappa)}$ über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind. Das ist in der Tat der Fall. Denn angenommen, es gäbe ein $s \in \mathfrak{T}$ und Zahlen $\alpha_\rho^{(\varkappa)}$, so dass

$$(1) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{p-1} \sum_{\rho=1}^{r_\varkappa} \alpha_\rho^{(\varkappa)} s_\rho^{(\varkappa)} = Ts$$

ist. Wird T^{p-1} auf (1) angewandt, so erhält man

$$\sum_{\rho=1}^{r_0} \alpha_\rho^{(p-1)} d_\rho^{(p-1)} = T^p s.$$

Das Element auf der linken Seite dieser Gleichung liegt in $\mathfrak{d}_{p-1} \subseteq \mathfrak{K}_1$; da es gleich $T^p s$ ist, aber auch in $\mathfrak{k}_p$, insgesamt

also in $\mathfrak{v}_p = 0$. Es ist daher selbst gleich 0, woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der $d_\sigma^{(p-1)}$ das Verschwinden aller Koeffizienten $\alpha_\sigma^{(p-1)}$ folgt. In (1) treten also nur Glieder mit $\varkappa \leq p-2$ auf. Wendet man nun T^{p-2} auf (1) an, so ergibt sich

$$\sum_{\sigma=1}^{r_{p-2}} \alpha_\sigma^{(p-2)} d_\sigma^{(p-2)} = T^{p-1} s.$$

Daraus folgt, dass $T^{p-1}s$ in $\mathfrak{v}_{p-1}$ liegt. Da die Elemente $d_\sigma^{(p-2)}$ über $\mathfrak{v}_{p-1}$ linear unabhängig sind, verschwinden also alle Koeffizienten $\alpha_\sigma^{(p-2)}$. So kann man weiterschliessen und findet, dass alle Koeffizienten $\alpha_\sigma^{(\varkappa)}$ in (1) verschwinden, d.h. dass die Elemente $s_\sigma^{(\varkappa)}$ in der Tat über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind.[1]

Wir beweisen nun (b). Es sei q die 2. Kettenlänge. Nach Hilfssatz 6 gibt es zu $\mathfrak{k}_1$ ein Komplement $\mathfrak{x}_1$ in $\mathfrak{k}$, das ganz in $\mathfrak{k}_q$ liegt. Nach Hilfssatz 1 wird $\mathfrak{x}_1$ von $\beta(T)$ Elementen aufgespannt, die linear unabhängig über $\mathfrak{k}_1$ sind. Die behauptete Ungleichung $\nu(T) \geq \beta(T)$ ist daher sicher richtig, falls es in $\mathfrak{k}_q$ nicht mehr als $\nu(T)$ Elemente gibt, die über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind. Das soll nun gezeigt werden. Dabei können wir $q \geq 1$ voraussetzen, weil für $q = 0$ auch $\beta(T) = 0$ und daher trivialerweise $\nu(T) \geq \beta(T)$ ist.

Für $\mu = 0,1,\ldots,q-1$ wählen wir in $\mathfrak{k}_{\mu+1}$ Elemente $h_1^{(\mu)},\ldots,h_{r_\mu}^{(\mu)}$ aus, die über $\mathfrak{k}_\mu + \mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind[2]. Es kann $r_\mu = 0$ sein, dann werden keine Elemente ausgewählt. Die Gesamtheit dieser Elemente $h_\sigma^{(\mu)}$ ist, wie man leicht sieht, über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig, es ist also

$$\sum_{\mu=0}^{q-1} r_\mu \leq \beta(T). \tag{2}$$

---

1) Insbesondere gibt es unter den vorliegenden Voraussetzungen in $\mathfrak{k}_p$ also $\nu(T)$ Elemente, die über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind, nämlich die $s_\sigma^{(\varkappa)}$.

2) Man beachte hierbei, dass $\mathfrak{k}_\mu \subseteq \mathfrak{k}_{\mu+1}$ ist.

Wir setzen nun

(3) $\qquad k_\varrho^{(\mu)} = T^\mu h_\varrho^{(\mu)}$ für $0 \leq \mu \leq q-1$, $1 \leq \varrho \leq r_\mu$.

Da $K_\mu \subseteq K_q$ für die in (3) angegebenen Werte von μ ist, liegen alle $h_\varrho^{(\mu)}$ in K_q, und wegen $h_\varrho^{(\mu)} \in K_{\mu+1}$ ist $k_\varrho^{(\mu)} \in K_1$ für alle in (3) angegebenen Werte von μ und ϱ.

Die Elemente $k_\varrho^{(\mu)}$ sind linear unabhängig. Wir beweisen dies, indem wir zeigen: Für jedes $m \leq q$ sind die Elemente $k_\varrho^{(\mu)}$ für alle $\mu \leq m-1$ sogar über U_m linear unabhängig.

Für $m = 1$ trifft das wegen $k_\varrho^{(0)} = h_\varrho^{(0)}$ nach der Definition der $h_\varrho^{(0)}$ zu. Die obige Behauptung sei nun schon für ein m $(1 \leq m \leq q-1)$ bewiesen. Ist dann

(4) $\qquad \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\varrho=1}^{r_\mu} \alpha_\varrho^{(\mu)} k_\varrho^{(\mu)} = T^{m+1} s$,

für ein $s \in T$, so ist wegen $k_\varrho^{(m)} = T^m h_\varrho^{(m)}$ insbesondere

(5) $\qquad \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\varrho=1}^{r_\mu} \alpha_\varrho^{(\mu)} k_\varrho^{(\mu)} \in U_m$,

also sind nach der Induktionsannahme alle in (5) auftretenden Koeffizienten $\alpha_\varrho^{(\mu)}$ gleich 0. Die Gleichung (4) reduziert sich daher auf die Beziehung

$$\sum_{\varrho=1}^{r_m} \alpha_\varrho^{(m)} k_\varrho^{(m)} = \sum_{\varrho=1}^{r_m} \alpha_\varrho^{(m)} T^m h_\varrho^{(m)} = T^{m+1} s.$$

Da jedes $h_\varrho^{(m)}$ in K_{m+1} liegt, ist auch

$$h' = \sum_{\varrho=1}^{r_m} \alpha_\varrho^{(m)} h_\varrho^{(m)} \in K_{m+1}.$$

Wird $h = h' - Ts$ gesetzt, so ist

$$T^m h = T^m h' - T^{m+1} s = 0,$$

also $h \in K_m$ und daher

$$h' = h + Ts \in K_m + U_1.$$

Da die Elemente $h_\varrho^{(m)}$ über dem System $K_m + U_1$ definitionsgemäss linear unabhängig sind, verschwinden auch alle Koeffizienten $\alpha_\varrho^{(m)}$. Damit ist die Behauptung über die lineare Unabhängigkeit der $k_\varrho^{(\mu)}$ durch vollständige Induktion bewiesen.

Aus der linearen Unabhängigkeit der $k_\varrho^{(\mu)}$ folgt, dass

(6) $$\sum_{\mu=0}^{q-1} r_\mu \leq \nu(T)$$

ist.

Wir haben bisher noch keinen Gebrauch von der Voraussetzung gemacht, dass $\beta(T)$ oder $\nu(T)$ endlich ist. Diese Voraussetzung benützen wir nun lediglich um zu zeigen, dass wir die Zahlen r_μ maximal wählen können, d.h. dass wir für $\mu = 0,1,\ldots,q-1$ in $\mathfrak{k}_{\mu+1}$ ein endliches maximales System von Elementen $h_1^{(\mu)},\ldots,h_{r_\mu}^{(\mu)}$ wählen können, die über $\mathfrak{k}_\mu + \mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind. Das ergibt sich im Falle $\beta(T) < \infty$ aus (2), im Falle $\nu(T) < \infty$ aus (6).

Für das Weitere seien die Zahlen r_μ maximal gewählt. Dann gibt es genau $r = \sum_{\mu=0}^{q-1} r_\mu$ Elemente aus $\mathfrak{k}_q$, die über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind. Denn einerseits gibt es r solcher Elemente, nämlich die $h_\varrho^{(\mu)}$, andererseits gibt es nicht mehr, weil sich, wie man leicht sieht, jedes $h \in \mathfrak{k}_q$ in der Form

$$h = \sum_{\mu=0}^{q-1} \sum_{\varrho=1}^{r_\mu} \kappa_\varrho^{(\mu)} h_\varrho^{(\mu)} + Ts$$

mit $s \in T$ darstellen lässt, d.h. als Linearkombination über $\mathfrak{k}_1$ von r Elementen, und mehr als r solcher Linearkombinationen linear unabhängig über $\mathfrak{k}_1$ sind.

Da nach (6) jedoch $r \leq \nu(T)$ ist, ist auf Grund unserer Vorbemerkung die behauptete Ungleichung $\beta(T) \leq \nu(T)$ bewiesen.

Anmerkung: r ist die Maximalzahl von Elementen aus $\mathfrak{k}_q$, die über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind. Aus unserer Bemerkung am Anfang des Beweises von (b) folgt, dass diese Maximalzahl gleich $\beta(T)$ ist. Es ist also $r = \beta(T)$. Daraus folgt, dass es $\beta(T)$ Elemente in $\mathfrak{k}_1$ gibt, die über $\mathfrak{k}_q$ linear unabhängig sind, nämlich die $r = \beta(T)$ Elemente $k_\varrho^{(\mu)}$, die in (3) definiert wurden. Diese Anmerkung benötigen wir für den Beweis des Satzes 3.

Aus Satz 2 folgt

Corollar 1: Erfüllt der Operator T beide Kettenbedingungen und ist $\nu(T)$ oder $\beta(T)$ endlich, so ist $\nu(T) = \beta(T)$.

Ein Gegenstück zu diesem Corollar ist der folgende

Satz 3: Ist $\nu(T) = \beta(T) < \infty$ und erfüllt der Operator T eine der beiden Kettenbedingungen, so erfüllt T auch die andere[3].

Zum Beweis nehmen wir zuerst an, dass T die 1. Kettenbedingung mit der Kettenlänge p erfüllt. Nach Seite 22, Fussnote 1) gibt es $\nu(T)$ Elemente in $\mathfrak{k}_p$, die über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind. Wegen $\beta(T) = \nu(T)$ ist das von diesen Elementen aufgespannte lineare System ein Komplement zu $\mathfrak{k}_1$ in $\mathfrak{r}$, und nach Hilfssatz 6 erfüllt daher T die 2. Kettenbedingung. Nun nehmen wir umgekehrt an, dass T die 2. Kettenbedingung mit der Kettenlänge q erfüllt. Nach der Anmerkung am Ende des Beweises von Satz 2 gibt es $\beta(T)$ Elemente in $\mathfrak{k}_1$, die über $\mathfrak{k}_q$ linear unabhängig sind, und wegen $\nu(T) = \beta(T)$ spannen diese Elemente gerade $\mathfrak{k}_1$ auf. Es ist also $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_q = 0$, und daher erfüllt T nach Hilfssatz 6 die 1. Kettenbedingung.

Aus den Sätzen 1 und 3 folgt

Corollar 2: Ist $\nu(T) = \beta(T) < \infty$, so erfüllt der Operator T genau dann beide Kettenbedingungen, wenn jedes lineare Untersystem, das durch T auf sich abgebildet wird, sogar eineindeutig auf sich abgebildet wird.

---

3) Auf andere Weise wurde dieselbe Aussage von Yood [22] für den Fall bewiesen, dass T ein Homomorphismus eines Banach-Raumes ist (zur Definition des Homomorphismus vgl. Seite 45).

Besonders wichtige Beispiele für die Operatoren, die sowohl die Defektrelation $\nu(T) = \beta(T) < \infty$ als auch die Kettenbedingungen erfüllen, sind die Operatoren auf endlichdimensionalen linearen Systemen und die mit vollstetigen Operatoren V gebildeten Operatoren der Form $T = V - I$ auf normierten linearen Systemen. Im Corollar zu dem folgenden Satz werden wir eine weitere Operatorenklasse kennenlernen, die diese wichtigen Eigenschaften besitzt.

Satz 4: Es sei $T = A - \zeta I$ ein Operator auf $\mathfrak{T}$, [4] A' und I' seien die Einschränkungen von A und I auf $A\mathfrak{T}$ und ζ sei $\neq 0$. Erfüllt $T' = A' - \zeta I'$ die Defektrelation $\nu(T') = \beta(T') < \infty$, so erfüllt T die Defektrelation $\nu(T) = \beta(T) < \infty$. Erfüllt T' ausserdem eine Kettenbedingung, so erfüllt T beide Kettenbedingungen.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass

$$\mathfrak{k}_m = \mathfrak{k}((A-\zeta I)^m) \subseteq A\mathfrak{T} \quad \text{für} \quad \zeta \neq 0 \text{ und } m \geq 0 \tag{7}$$

ist. Ist nämlich $k \in \mathfrak{k}_m$, so ist

$$0 = (A - \zeta I)^m k = \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \zeta^\mu A^{m-\mu} k \quad ,$$

also

$$(-1)^m \zeta^m k = -A \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^\mu \zeta^\mu A^{m-\mu-1} k \, .$$

Da $\zeta \neq 0$ ist, liegt also in der Tat k in $A\mathfrak{T}$.

Wie man leicht sieht, folgt aus (7) die Gleichung

$$\mathfrak{k}((A' - \zeta I')^m) = \mathfrak{k}((A - \zeta I)^m) \quad \text{für } \zeta \neq 0 \text{ und } m \geq 0 \, . \tag{8}$$

Die Beziehungen (7) und (8) gelten herleitungsgemäss für beliebige Operatoren A.

Nun sei $\nu(A' - \zeta I') = \beta(A' - \zeta I') < \infty$ und $\zeta \neq 0$. Aus (8) folgt $\nu(A - \zeta I) = \nu(A' - \zeta I') < \infty$.

4) Natürlich kann jeder Operator T in der Form $T = A - \zeta I$ geschrieben werden. Man hat nur $A = T + \zeta I$ zu setzen.

Nach Hilfssatz 1 gibt es ein lineares System $\mathfrak{Z} \leq A\mathfrak{T}$, so dass

(9) $$A\mathfrak{T} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{k}(A' - \zeta I'), \quad \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{k}(A' - \zeta I') = 0 \text{ und}$$
$$\beta = [\mathfrak{Z}] = \beta(A' - \zeta I') = \nu(A' - \zeta I') = \nu(A - \zeta I)$$

ist. Wegen $\mathfrak{k}(A' - \zeta I') = \mathfrak{k}(A - \zeta I) \cap A\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{Z} \leq A\mathfrak{T}$ ist auch $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{k}(A - \zeta I) = 0$. Daher sind die Elemente $c_1, \ldots, c_\beta$ einer Basis von $\mathfrak{Z}$ über $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ linear unabhängig. Diese Elemente bilden sogar eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$. Denn ist s ein beliebiges Element von $\mathfrak{T}$ und $t = (A - \zeta I)s$, so ist wegen (9)

$$\zeta s = As - t = \sum_{n}^{\beta} \alpha_n c_n + (A' - \zeta I')x - t \quad \text{mit } x \in A\mathfrak{T},$$

also

$$s = \frac{1}{\zeta} \sum_{n}^{\beta} \alpha_n c_n + \frac{1}{\zeta}(A - \zeta I)(x - s).$$

Jedes Element aus $\mathfrak{T}$ lässt sich also als Linearkombination der $c_1, \ldots, c_\beta$ über $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ darstellen. Insgesamt ist also $\beta(A - \zeta I) = \beta = \nu(A - \zeta I)$. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Erfüllt T' ausserdem eine Kettenbedingung, so erfüllt T' nach Satz 3 insbesondere die 1. Kettenbedingung. Nach (8) erfüllt daher T die 1. Kettenbedingung, nach Satz 3 also auch die zweite. Damit ist auch der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Corollar 3: Ist S ein Operator von endlichem Rang und $\zeta \neq 0$, so erfüllt $S - \zeta I$ die Defektrelation $\nu(S - \zeta I) = \beta(S - \zeta I) < \infty$ und beide Kettenbedingungen.

Der Beweis ergibt sich aus Satz 4, weil $S\mathfrak{T}$ von endlicher Dimension ist und daher S', die Einschränkung von S auf $S\mathfrak{T}$, die Defektrelation $\nu(S' - \zeta I') = \beta(S' - \zeta I') < \infty$ und beide Kettenbedingungen erfüllt.

Wir beweisen nun drei Zerlegungssätze für Operatoren mit endlichem Defekt.

Satz 5: Ist $\nu(T) < \infty$ und $\beta(T) \geq \nu(T)$, so kann der Operator T in eine Summe $T = R + S$ zerlegt werden, wobei R eineindeutig und S von endlichem Rang ist. Ist $\beta(T) < \infty$ und $\nu(T) \geq \beta(T)$, so kann T in eine Summe $T = R + S$ zerlegt werden, wobei R das lineare System $\mathfrak{T}$ auf sich abbildet und S von endlichem Rang ist.

Beweis: Es sei $\nu(T) < \infty$ und $\beta(T) \geq \nu(T)$. Für $\nu(T) = 0$ kann $R = T$, $S = 0$ gewählt werden. Es sei weiterhin $\nu(T) = \nu > 0$. Bilden die Elemente $k_1, \ldots, k_\nu$ eine Basis von $\mathfrak{k}_1$, so gibt es ν lineare Funktionale F_n $(n = 1, \ldots, \nu)$ auf $\mathfrak{T}$ mit $F_n(k_m) = \delta_{nm}$[5]. Nun wählen wir ν Elemente $s_1, \ldots s_\nu$ in $\mathfrak{T}$ aus, die über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind; wegen $\beta(T) \geq \nu(T)$ ist das möglich. Damit bilden wir einen Operator S von endlichem Rang durch die Definition

$$Sf = \sum_{n=1}^{\nu} F_n(f) s_n \tag{10}$$

und setzen $R = T - S$. R ist eineindeutig; denn aus $Rf = 0$ folgt $Tf = Sf = \sum_{n=1}^{\nu} F_n(f) s_n$, also $F_n(f) = 0$ für $n = 1, \ldots, \nu$, da die s_n über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind. Somit ist auch $Tf = 0$, also $f \in \mathfrak{k}_1$ und daher $f = \alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_\nu k_\nu$. Aus der Definition der Funktionale F_n folgt, dass $\alpha_n = F_n(f)$ ist. Oben haben wir gesehen, dass $F_n(f) = 0$ ist. Also ist $\alpha_n = 0$ für $n = 1, \ldots, \nu$ und daher $f = 0$. R ist also wie behauptet eineindeutig, und in $T = R + S$ haben wir die gewünschte Zerlegung.

Nun sei $\beta(T) < \infty$ und $\nu(T) \geq \beta(T)$. Für $\beta(T) = 0$ kann $R = T$, $S = 0$ gewählt werden. Es sei weiterhin $\beta(T) = \beta > 0$. Wegen $\nu(T) \geq \beta(T)$ gibt es β linear unabhängige Elemente $k_1, \ldots, k_\beta$ in $\mathfrak{k}_1$. Zu ihnen gibt es β lineare Funktionale F_n $(n=1, \ldots, \beta)$ auf $\mathfrak{T}$ mit $F_n(k_m) = \delta_{nm}$[5]. Mit β Elementen $s_1, \ldots, s_\beta$, die

[5] Vgl. Williamson [21], Lemma 1. δ_{nm} ist das Kroneckersymbol.

über $\mathfrak{k}_1$ linear unabhängig sind, bilden wir einen Operator S von endlichem Rang nach der Vorschrift

$$Sf = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(f)s_n \,. \tag{11}$$

Wir zeigen nun, dass der Operator $R = T - S$ das System $\mathfrak{r}$ auf sich abbildet. Ist s ein beliebiges Element aus $\mathfrak{r}$, so kann es in der Form

$$s = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n + Tx \quad , x \in \mathfrak{r}$$

dargestellt werden. Mit $\gamma_n = F_n(x)$ bilden wir das Element

$$y = x - \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n + \gamma_n)k_n .$$

Wegen $Tk_n = 0$ und $Sk_n = s_n$ ist

$$Ry = Tx - \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n s_n + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n + \gamma_n)s_n = Tx + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n s_n = s,$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist. In $T = R + S$ haben wir daher die gewünschte Zerlegung[6].

Satz 6: Der Operator T erfüllt genau dann die Defektrelation $\nu(T) = \beta(T) < \infty$, wenn T in eine Summe $T = R + S$ zerlegt werden kann, wobei R das System $\mathfrak{r}$ eineindeutig auf sich abbildet und S von endlichem Rang ist.

Beweis: Ist $\nu(T) = \beta(T) < \infty$, so kann man den Operator S sowohl nach der Vorschrift (10) als auch nach (11) bilden. Daher ist $R = T - S$ eineindeutig und bildet $\mathfrak{r}$ auf sich ab, so dass wir in $T = R + S$ die gewünschte Zerlegung gefunden haben.

Nun sei umgekehrt $T = R + S$ eine Zerlegung des Operators T von der im Satz beschriebenen Art. Aus

$$T = R(I + R^{-1}S)$$

folgt nach §1, Corollar 1, dass

$$\begin{aligned} \nu(T) &= \nu(I + R^{-1}S), \\ \beta(T) &= \beta(I + R^{-1}S) \end{aligned} \tag{12}$$

---

[6] Der Beweis dieses Satzes benutzt ein Verfahren, das Yood [22] angewandt hat, um einen analogen Zerlegungssatz für Homomorphismen mit endlichem Defekt auf einem Banach-Raum herzuleiten.

ist. Da mit S auch $R^{-1}S$ ein Operator von endlichem Rang und nach Corollar 3 daher $\nu(I + R^{-1}S) = \beta(I + R^{-1}S) < \infty$ ist, folgt aus (12) die behauptete Relation $\nu(T) = \beta(T) < \infty$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 7: Die folgenden Aussagen über den Operator T auf $\mathfrak{T}$ sind äquivalent:

(a) Es ist $\nu(T) = \beta(T) < \infty$ und T erfüllt beide Kettenbedingungen.

(b) Es gibt eine Zerlegung

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{b} + \mathfrak{k} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{b} \cap \mathfrak{k} = 0$$

wobei $\mathfrak{k}$ von endlicher Dimension ist und T das System $\mathfrak{k}$ in sich, das System $\mathfrak{b}$ eineindeutig auf sich abbildet.

(c) T lässt sich in eine Summe T = R + S zerlegen, wobei R das System $\mathfrak{T}$ eineindeutig auf sich abbildet, S von endlichem Rang und RS = SR ist.

Wir führen den Beweis, indem wir (b) aus (a), (c) aus (b) und schliesslich (a) aus (c) herleiten.

Es sei (a) erfüllt. Nach Hilfssatz 7 sind die erste und zweite Kettenlänge von T gleich; diese gemeinsame Länge sei p. Setzen wir

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(T^p) \quad \text{und} \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{k}(T^p),$$

so erhalten wir nach Hilfssatz 8 in $\mathfrak{T} = \mathfrak{b} + \mathfrak{k}$ eine Zerlegung von der in (b) beschriebenen Art.

Nun sei (b) erfüllt. Jedes $s \in \mathfrak{T}$ lässt sich dann eindeutig in der Form

$$s = b + k \quad \text{mit} \quad b \in \mathfrak{b} \quad , \; k \in \mathfrak{k}$$

darstellen. Durch die Vorschriften

$$Ps = b \quad \text{und} \quad Qs = k$$

werden zwei Operatoren P und Q auf $\mathfrak{T}$ definiert. Man sieht leicht, dass

$$P + Q = I, \quad PQ = QP = 0 \quad \text{und} \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q$$

ist. P heisst die Projektion von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{b}$ längs $\mathfrak{k}$, Q entsprechend die Projektion von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{k}$ längs $\mathfrak{b}$. Mit einer Zahl $\zeta \neq 0$ setzen wir

(13) $$R = TP - \zeta Q \quad \text{und} \quad S = TQ + \zeta Q.$$

Damit wird

$$R + S = (TP - \zeta Q) + (TQ + \zeta Q) = T(P + Q) = T.$$

Wir zeigen nun, dass diese Zerlegung T = R + S von T die in (c) angeführten Eigenschaften hat.

Wegen $[\mathfrak{k}] < \infty$ ist Q ein Operator von endlichem Rang. Also ist auch $S = TQ + \zeta Q$ ein Operator von endlichem Rang.

Nun zeigen wir, dass R das System $\mathfrak{T}$ eineindeutig auf sich abbildet, d.h. dass die Gleichung $Rs = s_0$ für jedes $s_0 \in \mathfrak{T}$ stets eindeutig lösbar ist. Wir setzen

$$s = b + k \quad \text{mit} \quad b \in \mathfrak{b}, \quad k \in \mathfrak{k}$$

$$s_0 = b_0 + k_0 \quad \text{mit} \quad b_0 \in \mathfrak{b}, \quad k_0 \in \mathfrak{k}.$$

Dann ist die Gleichung $Rs = s_0$ wegen $Rs = (TP - \zeta Q)(b+k) = Tb - \zeta k$ gleichbedeutend mit der Gleichung

$$Tb - \zeta k = b_0 + k_0,$$

und da $Tb \in \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{k} = 0$ ist, ist diese Gleichung gleichbedeutend mit den beiden Gleichungen

$$Tb = b_0,$$

$$-\zeta k = k_0 .$$

Da T das System $\mathfrak{b}$ eineindeutig auf sich abbildet, ist die erste dieser Gleichungen für jedes $b_0 \in \mathfrak{b}$ stets eindeutig durch ein $b \in \mathfrak{b}$ lösbar, und wegen $\zeta \neq 0$ ist die zweite für jedes $k_0 \in \mathfrak{k}$ stets eindeutig durch ein $k \in \mathfrak{k}$ lösbar. Damit

ist gezeigt, dass R das System $\mathfrak{T}$ eineindeutig auf sich abbildet.

Die Vertauschbarkeit von R und S ergibt sich so. Da $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}$ durch T in sich abgebildet werden, sieht man leicht, dass

$$TP = PT \quad \text{und} \quad TQ = QT$$

ist. Mit $PQ = QP = 0$ folgt daraus

$$RS = (TP - \xi Q)(TQ + \xi Q) = TP \cdot TQ + \xi TPQ - \xi QTQ - \xi Q^2 = \xi TQ - \xi Q,$$

$$SR = (TQ + \xi Q)(TP - \xi Q) = TQ \cdot TP + \xi QTP - \xi TQ^2 - \xi Q^2 = \xi TQ - \xi Q.$$

Also ist $RS = SR$.

Damit haben wir (c) aus (b) hergeleitet.

Nun sei (c) erfüllt. Nach Satz 6 ist $\nu(T) = \Lambda(T) < \infty$, so dass wir nur noch zu zeigen haben, dass T beide Kettenbedingungen erfüllt. Das geschieht folgendermassen. Wegen der Vertauschbarkeit von R und S ist

$$T^n = (R + S)^n = R^n + (nR^{n-1} + \ldots + S^{n-1})S.$$

Setzen wir

$$C_n = nR^{n-1} + \ldots + S^{n-1},$$

so ist

$$(14) \quad T^n = R^n + C_n S = R^n(I + R^{-n}C_n S).$$

Die Operatoren R^{-n}, C_n und S sind wegen $RS = SR$ miteinander vertauschbar. Ist $(I + R^{-n}C_n S)k = 0$, so ist daher

$$k = -R^{-n}C_n Sk = SR^{-n}C_n k \in S\mathfrak{T}.$$

Daher, und weil S von endlichem Rang ist, gilt

$$\nu(I + R^{-n}C_n S) \leq [S\mathfrak{T}] < \infty.$$

Da wegen der Eineindeutigkeit von R^n nach (14)

$$\nu(T^n) = \nu(I + R^{-n}C_n S)$$

ist, gilt also die Ungleichung

$$\nu(T^n) \leq [S\mathfrak{T}] < \infty.$$

Nach Hilfssatz 5 folgt daraus, dass T die 1. Kettenbedingung erfüllt.

Damit ist der Satz 7 vollständig bewiesen.

Wegen einer Anwendung in §3 sprechen wir das folgende Corollar zu Satz 7 aus:

Corollar 4: Es sei für den Operator T die Aussage (b) des Satzes 7 richtig. Dann gibt es zu jeder Zahl $\zeta_0 \neq 0$ einen Operator S von endlichem Rang, so dass $\mathfrak{k}(T) = \mathfrak{k}(S - \zeta_0 I)$ ist, nämlich $S = TQ + \zeta_0 Q$, wobei Q die Projektion von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{k}$ längs $\mathfrak{k}$ ist.

Beweis: Aus (13) folgt mit $\zeta = \zeta_0$ und $S = TQ + \zeta_0 Q$

$$T = -\frac{1}{\zeta_0}(S - \zeta_0 I)R. \tag{15}$$

Daraus folgt trivialerweise, dass jedes $s \in \mathfrak{k}(T)$ zu $\mathfrak{k}(S - \zeta_0 I)$ gehört. Nun sei umgekehrt $s \in \mathfrak{k}(S - \zeta_0 I)$, also $s = (S - \zeta_0 I)s'$. Da R das System $\mathfrak{T}$ auf sich abbildet, gibt es ein $x \in \mathfrak{T}$, so dass $Rx = -\zeta_0 s'$ ist. Damit ist

$$s = -\frac{1}{\zeta_0}(S - \zeta_0 I)Rx,$$

nach (15) ist also $s \in \mathfrak{k}(T)$.

Zusammen ist daher $\mathfrak{k}(T) = \mathfrak{k}(S - \zeta_0 I)$.

Die Zerlegungssätze 6 und 7 geben uns die Möglichkeit, Aussagen über Produkte von Operatoren mit endlichen Defekten zu machen. Dabei werden wir die einfache Tatsache benutzen, dass die Operatoren von $\mathfrak{T}$, die $\mathfrak{T}$ eineindeutig auf sich abbilden, eine Gruppe und die Operatoren von endlichem Rang ein Ideal im Ring aller Operatoren auf $\mathfrak{T}$ bilden.

Satz 8: T_1 und T_2 seien zwei Operatoren auf $\mathfrak{T}$. Ist $\nu(T_i) = \beta(T_i) < \infty$ für $i = 1,2$, so ist auch

$$\nu(T_1 T_2) = \beta(T_1 T_2) < \infty.$$

Sind T_1 und T_2 vertauschbar, so erfüllt $T_1 T_2$ genau dann die

Defektrelation $\nu(T_1T_2) = \beta(T_1T_2) < \infty$ und beide Kettenbedingungen, wenn $\nu(T_i) = \beta(T_i) < \infty$ ist für i = 1,2 und T_1, T_2 beide Kettenbedingungen erfüllen.

Beweis: Es sei $\nu(T_i) = \beta(T_i) < \infty$ für i = 1,2. Nach Satz 6 gibt es Operatoren R_i, S_i, so dass $T_i = R_i + S_i$ für i = 1,2, wobei R_i das System $\mathfrak{r}$ eineindeutig auf sich abbildet und S_i von endlichem Rang ist. Daraus folgt die Gleichung

$$T_1T_2 = R_1R_2 + (R_1S_2 + S_1R_2 + S_1S_2).$$

Da R_1R_2 das System $\mathfrak{r}$ eineindeutig auf sich abbildet und $R_1S_2 + S_1R_2 + S_1S_2$ von endlichem Rang ist, folgt nach Satz 6, dass $\nu(T_1T_2) = \beta(T_1T_2) < \infty$ ist. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Nun seien T_1 und T_2 vertauschbar, und T_1, T_2 mögen die Defektrelationen $\nu(T_i) = \beta(T_i) < \infty$ und beide Kettenbedingungen erfüllen. Aus dem eben bewiesenen ersten Teil des Satzes folgt, dass auch $\nu(T_1T_2) = \beta(T_1T_2) < \infty$ ist. Wir zeigen nun, dass T_1T_2 die 1. Kettenbedingung erfüllt. Wegen der Vertauschbarkeit von T_1, T_2 ist $(T_1T_2)^n = T_1^nT_2^n$, also $\mathfrak{k}((T_1T_2)^n) = \mathfrak{k}(T_1^nT_2^n)$ für n = 0,1,... . Wenden wir den ersten Teil unseres Satzes auf T_i^n und $T_1^nT_2^n$ an, so folgt insbesondere, dass die Nulldefekte $\nu(T_i^n)$ und $\nu(T_1^nT_2^n)$ für i = 1,2 und $n \geq 0$ endlich sind; ist p_i die 1. Kettenlänge von T_i, so gilt wegen $\mathfrak{k}(T_i^n) \subseteq \mathfrak{k}(T_i^{p_i})$ genauer, dass

(16) $\nu(T_i^n) \leq \nu(T_i^{p_i}) < \infty$ für i = 1,2 und $n \geq 0$

ist. $\mathfrak{k}(T_1^nT_2^n)$ ist die Menge der $s \in \mathfrak{r}$, für die $T_2^ns \in \mathfrak{k}(T_1^n)$ ist, d.h. es ist $T_2^n\,\mathfrak{k}(T_1^nT_2^n) = \mathfrak{k}(T_1^n)$. Betrachten wir T_2^n als lineare Transformation mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{k}(T_1^nT_2^n)$ und ist $\mathfrak{k}^{(n)}$ der Kern dieser Transformation, so ist wegen der endlichen Dimension von $\mathfrak{k}(T_1^nT_2^n)$ bekanntlich

$$[\mathfrak{k}^{(n)}] = [\mathfrak{k}(T_1^nT_2^n)] - [\mathfrak{k}(T_1^n)] = \nu(T_1^nT_2^n) - \nu(T_1^n).$$

Wegen $\mathfrak{k}^{(n)} \subseteq \mathfrak{k}(T_2^n)$ folgt daraus

$$\nu(T_1^n T_2^n) - \nu(T_1^n) \leq \nu(T_2^n), \text{ also}$$
$$\nu(T_1^n T_2^n) \leq \nu(T_1^n) + \nu(T_2^n).$$

Wegen (16) erhalten wir daraus die Abschätzung

$$\nu(T_1^n T_2^n) \leq \nu(T_1^{p_1}) + \nu(T_2^{p_2}) < \infty \text{ für } n = 0,1,\ldots .$$

$\nu(T_1^n T_2^n)$ besitzt also eine von n unabhängige, endliche obere Schranke. Nach Hilfssatz 5 erfüllt daher $T_1 T_2$ die erste Kettenbedingung, und daraus folgt wegen $\nu(T_1 T_2) = \beta(T_1 T_2) < \infty$ nach Satz 3, dass $T_1 T_2$ auch die zweite Kettenbedingung erfüllt.

Nun möge umgekehrt, wieder mit vertauschbaren T_1, T_2, der Operator $T_1 T_2$ die Defektrelation $\nu(T_1 T_2) = \beta(T_1 T_2) < \infty$ und beide Kettenbedingungen erfüllen. Ist p die (nach Hilfssatz 7 gemeinsame) Kettenlänge von $T_1 T_2$, so ist nach dem ersten Teil unseres Satzes $\nu(T_1^p T_2^p) = \beta(T_1^p T_2^p) < \infty$. Daraus folgt wegen

$$\mathfrak{k}(T_1^n) \leq \mathfrak{k}(T_1^n T_2^n) = \mathfrak{k}(T_1^n T_2^n) \leq \mathfrak{k}(T_1^p T_2^p) \quad \text{für } n \geq 0,$$

dass $\nu(T_1^n) \leq \nu(T_1^p T_2^p) < \infty$ ist, und wegen

$$\mathfrak{b}(T_1^n) \geq \mathfrak{b}(T_1^n T_2^n) \geq \mathfrak{b}(T_1^p T_2^p) \quad \text{für } n \geq 0,$$

dass $\beta(T_1^n) \leq \beta(T_1^p T_2^p) < \infty$ ist. Nach Hilfssatz 5 erfüllt daher T_1 beide Kettenbedingungen und daher wegen $\nu(T_1) < \infty$ nach Corollar 1 auch die Defektrelation $\nu(T_1) = \beta(T_1) < \infty$. Dasselbe gilt wegen $T_1 T_2 = T_2 T_1$ auch für T_2.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Es ist für spätere Untersuchungen wichtig zu wissen, wie sich Operatoren mit endlichem Defekt auf <u>invarianten</u> linearen Untersystemen verhalten, d.h. auf Untersystemen, die durch T in sich abgebildet werden. Wir beweisen in dieser Richtung die folgenden Sätze.

Hilfssatz 1: Das lineare System $\mathfrak{T}$ zerfalle in zwei komplementäre und unter dem Operator T invariante Untersysteme $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$, d.h. es sei

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2, \quad \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = 0, \quad T\mathfrak{U}_i \subseteq \mathfrak{U}_i \quad \text{für } i = 1,2.$$

Ist $T^{(i)}$ die Einschränkung von T auf $\mathfrak{U}_i$, so gelten die folgenden Zerlegungsgleichungen:

(17) $\mathfrak{K}(T) = \mathfrak{K}(T') + \mathfrak{K}(T'')$ mit $\mathfrak{K}(T') \cap \mathfrak{K}(T'') = 0$,

(18) $\mathfrak{B}(T) = \mathfrak{B}(T') + \mathfrak{B}(T'')$ mit $\mathfrak{B}(T') \cap \mathfrak{B}(T'') = 0$.

Wir beweisen zuerst (17). Da $\mathfrak{K}(T^{(i)}) \subseteq \mathfrak{U}_i$ und $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = 0$ ist, gilt auch $\mathfrak{K}(T') \cap \mathfrak{K}(T'') = 0$. Wegen $\mathfrak{K}(T^{(i)}) \subseteq \mathfrak{K}(T)$ und weil $\mathfrak{K}(T)$ ein lineares System ist, gilt ferner $\mathfrak{K}(T') + \mathfrak{K}(T'') \subseteq \mathfrak{K}(T)$. Die umgekehrte Ungleichung beweisen wir so. Zu einem $k \in \mathfrak{K}(T)$ gibt es nach Voraussetzung zwei Elemente $u_i \in \mathfrak{U}_i$, so dass $k = u_1 + u_2$ ist. Daraus folgt

$$0 = Tk = Tu_1 + Tu_2, \text{ also } Tu_1 = -Tu_2.$$

Weil $T\mathfrak{U}_i \subseteq \mathfrak{U}_i$ und $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = 0$ ist, ergibt sich daraus

$$Tu_1 = Tu_2 = 0, \text{ also auch } T'u_1 + T''u_2 = 0.$$

k ist somit als Summe eines Elementes u_1 aus $\mathfrak{K}(T')$ und eines Elementes u_2 aus $\mathfrak{K}(T'')$ dargestellt, d.h. es ist $\mathfrak{K}(T) \subseteq \mathfrak{K}(T') + \mathfrak{K}(T'')$. Damit ist (17) bewiesen.

Der Beweis von (18) verläuft ähnlich. Wegen $\mathfrak{B}(T^{(i)}) \subseteq \mathfrak{U}_i$ und $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = 0$ ist $\mathfrak{B}(T') \cap \mathfrak{B}(T'') = 0$. Weil $\mathfrak{B}(T)$ ein lineares System und $\mathfrak{B}(T^{(i)}) \subseteq \mathfrak{B}(T)$ ist, gilt $\mathfrak{B}(T') + \mathfrak{B}(T'') \subseteq \mathfrak{B}(T)$. Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, benutzen wir, dass es zu jedem $b \in \mathfrak{B}(T)$ ein $s \in \mathfrak{T}$ mit $b = Ts$ und zu s zwei Elemente $u_i \in \mathfrak{U}_i$ mit $s = u_1 + u_2$ gibt. Daraus folgt

$$b = Ts = Tu_1 + Tu_2 = T'u_1 + T''u_2.$$

Also ist $b \in \mathfrak{B}(T') + \mathfrak{B}(T'')$, d.h. es ist $\mathfrak{B}(T) \subseteq \mathfrak{B}(T') + \mathfrak{B}(T'')$. Damit ist auch (18) bewiesen.

Satz 9: Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes 1 gelten die folgenden Defektrelationen:

(19) $\nu(T) = \nu(T') + \nu(T'')$,

(20) $\beta(T) = \beta(T') + \beta(T'')$.

T erfüllt genau dann die erste bzw. zweite Kettenbedingung, wenn T' und T'' die erste bzw. zweite Kettenbedingung erfüllen.

Beweis: Die Gleichung (19) folgt unmittelbar aus (17). Die Gleichung (20) ergibt sich folgendermassen.

Die m Elemente $e_1,\ldots,e_m$ aus $\mathfrak{U}_1$ seien über $\mathfrak{k}(T')$, die n Elemente $f_1,\ldots,f_n$ aus $\mathfrak{U}_2$ über $\mathfrak{k}(T'')$ linear unabhängig. Dann sind die Elemente $e_1,\ldots,e_m,f_1,\ldots,f_n$ über $\mathfrak{k}(T)$ linear unabhängig. Es sei nämlich

(21) $\sum_i \alpha_i e_i + \sum_i \beta_i f_i = b \in \mathfrak{k}(T)$.

Aus (18) folgt, dass

$$b = b' + b'' \quad \text{mit } b' \in \mathfrak{k}(T'),\ b'' \in \mathfrak{k}(T'')$$

ist. Nach (21) ist daher

$$\sum_i \alpha_i e_i - b' = \sum_i \beta_i f_i - b''.$$

Das Element auf der linken Seite dieser Gleichung liegt in $\mathfrak{U}_1$, das Element auf der rechten Seite in $\mathfrak{U}_2$. Wegen $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = 0$ ist also

$$\sum_i \alpha_i e_i = b' \quad \text{und} \quad \sum_i \beta_i f_i = b''.$$

Da die e_i über $\mathfrak{k}(T')$, die f_i über $\mathfrak{k}(T'')$ linear unabhängig sind, folgt daraus das Verschwinden aller Koeffizienten α_i, β_i. Die Elemente $e_1,\ldots,e_m,f_1,\ldots,f_n$ sind also in der Tat über $\mathfrak{k}(T)$ linear unabhängig. Insbesondere gilt daher (20), wenn einer der Defekte $\beta(T')$, $\beta(T'')$ unendlich ist.

Wir wollen weiterhin annehmen, dass diese beiden Defekte endlich sind und dass die Elemente $e_1,\ldots,e_m$ eine Basis von $\mathfrak{U}_1$ über $\mathfrak{k}(T')$, die Elemente $f_1,\ldots,f_n$ eine Basis von $\mathfrak{U}_2$ über

$\mathfrak{k}(T'')$ bilden, d.h. es sei $m = \beta(T')$ und $n = \beta(T'')$. Wir haben oben gesehen, dass die Elemente $e_1,\dots e_m, f_1,\dots f_n$ über $\mathfrak{k}(T)$ linear unabhängig sind. Nun wollen wir zeigen, dass sie sogar eine Basis von $\mathfrak{r}$ über $\mathfrak{k}(T)$ bilden. Es sei $s \in \mathfrak{r}$. Dann ist

$$s = u_1 + u_2 \quad \text{mit } u_i \in \mathfrak{u}_i \quad .$$

u_1 bzw. u_2 kann in der Form

$$u_1 = \sum_1^m \alpha_i e_i + b' \quad \text{mit } b' \in \mathfrak{k}(T')$$

$$u_2 = \sum_1^n \beta_i f_i + b'' \quad \text{mit } b'' \in \mathfrak{k}(T'')$$

dargestellt werden. Daraus folgt für s die Darstellung

$$s = \sum_1^m \alpha_i e_i + \sum_1^n \beta_i f_i + b' + b'' ;$$

dabei liegt b' + b'' nach (18) in $\mathfrak{k}(T)$. Die e_i, f_i bilden also in der Tat eine Basis von $\mathfrak{r}$ über $\mathfrak{k}(T)$. Daher ist

$$\beta(T) = m + n = \beta(T') + \beta(T'').$$

Damit ist die Gleichung (20) bewiesen.

Wir beweisen nun die Behauptung über die Kettenbedingungen. Dazu bemerken wir zuerst, dass $\mathfrak{u}_i$ auch unter allen Iterierten T^n invariant ist und dass die Einschränkung $(T^n)^{(i)}$ von T^n auf $\mathfrak{u}_i$ mit $(T^{(i)})^n$ übereinstimmt. Indem wir die Bezeichnungen

$$\mathfrak{k}_n = \mathfrak{k}(T^n) , \quad \mathfrak{k}_n^{(i)} = \mathfrak{k}((T^{(i)})^n)$$

$$\mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}(T^n) , \quad \mathfrak{z}_n^{(i)} = \mathfrak{z}((T^{(i)})^n)$$

einführen, erhalten wir für n = 1,2,... nach Hilfssatz 1 die Zerlegungen

(22) $\mathfrak{k}_n = \mathfrak{k}'_n + \mathfrak{k}''_n \quad , \quad \mathfrak{k}'_n \cap \mathfrak{k}''_n = 0 ;$

(23) $\mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}'_n + \mathfrak{z}''_n \quad , \quad \mathfrak{z}'_n \cap \mathfrak{z}''_n = 0 .$

Nun erfülle T die 1. Kettenbedingung mit der Kettenlänge p, es sei also $\mathfrak{k}_p = \mathfrak{k}_{p+1}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{k}'_p = \mathfrak{k}'_{p+1}$ ist, dass also auch T' die 1. Kettenbedingung erfüllt. Wegen der Symmetrie in den Voraussetzungen ist dann die entsprechende

Behauptung auch für T'' bewiesen. Es ist $K'_p \subseteq K'_{p+1}$, daher genügt es, die umgekehrte Ungleichung nachzuweisen. Dazu sei $k'_{p+1} \in K'_{p+1}$. Nach (22) (für n = p+1) liegt k'_{p+1} auch in K_{p+1} , wegen $K_p = K_{p+1}$ sogar in K_p . Wiederum nach (22) (für n = p) gibt es also eine Zerlegung

$$k'_{p+1} = k'_p + k''_p \quad \text{mit } k_p^{(i)} \in K_p^{(i)} \subseteq K_{p+1}^{(i)} ,$$

es ist also

$$k'_{p+1} - k'_p = k''_p .$$

Das Element auf der linken Seite dieser Gleichung liegt in K'_{p+1} , das Element auf der rechten in K''_{p+1} . Nach (22) ist $K'_{p+1} \cap K''_{p+1} = 0$, es ist also $k'_{p+1} = k'_p \in K'_p$. Daher ist in der Tat $K'_p \supseteq K'_{p+1}$.

Erfüllen umgekehrt T' und T'' die 1. Kettenbedingung mit den Kettenlängen p' und p'' und ist p = Max(p',p''), so erhält man unter Benutzung von (22) die Gleichungen

$$K_p = K'_p + K''_p = K'_{p+1} + K''_{p+1} = K_{p+1} .$$

T erfüllt also seinerseits die 1. Kettenbedingung.

Mutatis mutandis gilt dieser Beweis auch für die Aussage über die 2. Kettenbedingung.

Corollar 5: Es seien wieder die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt. Ist $\nu(T) = \beta(T) < \infty$ und erfüllt T eine Kettenbedingung, so ist auch $\nu(T^{(i)}) = \beta(T^{(i)}) < \infty$ für i = 1,2 und $T^{(i)}$ erfüllt beide Kettenbedingungen.

Ist umgekehrt $\nu(T^{(i)}) = \beta(T^{(i)}) < \infty$ für i = 1,2 und erfüllt jedes $T^{(i)}$ eine Kettenbedingung, so ist auch $\nu(T) = \beta(T) < \infty$ und T erfüllt beide Kettenbedingungen.

Beweis: Es sei $\nu(T) = \beta(T) < \infty$ und T erfülle eine Kettenbedingung. Dann erfüllt T nach Satz 3 beide Kettenbedingungen, nach Satz 9 erfüllt also auch $T^{(i)}$ beide Kettenbedingungen.

Da ausserdem nach (19) mit $\nu(T)$ auch $\nu(T^{(i)})$ endlich ist, gelten nach Corollar 1 die behaupteten Defektrelationen

$$\nu(T^{(i)}) = \beta(T^{(i)}) < \infty \quad \text{für } i = 1,2.$$

Der zweite Teil des Satzes wird ganz entsprechend bewiesen, man muss in dem vorstehenden Beweis nur überall T durch $T^{(i)}$ und $T^{(i)}$ durch T ersetzen.

Wir benutzen nun unsere bisherigen Sätze, um einige Aussagen über Polynome in Operatoren herzuleiten (zur Definition des Operatorpolynoms siehe Seite 15).

Satz 10: Es sei $\mathfrak{P}$ eine Menge von Polynomen, $\mathfrak{N}$ die Menge aller Nullstellen der Polynome aus $\mathfrak{P}$ und A ein Operator auf $\mathfrak{T}$. Gibt es zu jedem $s \in \mathfrak{T}$ in $\mathfrak{P}$ ein Polynom $p_s(z)$ mit $p_s(A)s = 0$,[7] so ist $\nu(A - \zeta I) = \beta(A - \zeta I) = 0$ für alle ζ, die nicht zu $\mathfrak{N}$ gehören.

Wir führen den Beweis zuerst für den Sonderfall, dass $\mathfrak{P}$ nur aus einem Polynom $p(z)$ besteht, d.h. dass $p(A) = 0$ ist. ζ sei keine Nullstelle von $p(z)$, es sei also $p(\zeta) = \eta \neq 0$. ζ ist eine Nullstelle des Polynoms $p(z) - \eta$, also gibt es ein Polynom $p_1(z)$, so dass

$$p(z) - \eta = (z - \zeta)p_1(z)$$

ist. Setzt man in diese Gleichung den Operator A ein, so erhält man wegen $p(A) = 0$ die Gleichung

$$-\eta I = (A - \zeta I)p_1(A).$$

Wegen $\eta \neq 0$ und der Vertauschbarkeit von $A - \zeta I$ und $p_1(A)$ folgt daraus leicht, dass $\nu(A - \zeta I) = \beta(A - \zeta I) = 0$ ist. Damit ist für diesen Sonderfall der Satz bewiesen.

7) Solche Operatoren A wurden zuerst von Williamson [21] untersucht.

Nun behandeln wir den allgemeinen Fall und zeigen zuerst, dass $\nu(A - \zeta I) = 0$ für alle $\zeta \notin \pi$ ist. Ist $k \in \mathfrak{k}(A - \zeta I)$, so ist

$$(A - \zeta I)k = 0, \text{ also } Ak = \zeta k.$$

Wie man leicht sieht, folgt daraus für jedes Polynom $p(z)$ die Gleichung

$$p(A)k = p(\zeta)k.$$

Ist insbesondere $p(z) = p_k(z)$, so ist

$$0 = p_k(A)k = p_k(\zeta)k.$$

Da $\zeta \notin \pi$ ist, folgt hieraus $k = 0$, also $\mathfrak{k}(A - \zeta I) = 0$, d.h. $\nu(A - \zeta I) = 0$, wie wir behauptet hatten.

Nun zeigen wir, dass $\beta(A - \zeta I) = 0$ ist für $\zeta \notin \pi$, d.h. dass $A - \zeta I$ das System $\mathfrak{T}$ auf sich abbildet. Es sei s ein beliebiges Element aus $\mathfrak{T}$. Wegen $p_s(A)s = 0$ liegt s in dem linearen System $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}(p_s(A))$. Wie man leicht sieht, bildet A dieses System $\mathfrak{k}$ in sich ab, ist also ein Operator A' auf $\mathfrak{k}$. Für alle $k \in \mathfrak{k}$ ist $p_s(A')k = p_s(A)k = 0$, d.h. es ist $p_s(A') = 0$. Da $\zeta \notin \pi$ ist, folgt gemäss dem zu Anfang behandelten Sonderfall, dass $\beta(A' - \zeta I') = 0$ ist. Es gibt also ein $k \in \mathfrak{k}$, so dass $s = (A' - \zeta I')k$ ist, daher tritt jedes $s \in \mathfrak{T}$ auch bei der Abbildung $A - \zeta I$ als Bild auf, d.h. es ist $\beta(A - \zeta I) = 0$.

Ein Operator A auf $\mathfrak{T}$ heisst quasinilpotent[8], wenn es zu jedem $s \in \mathfrak{T}$ eine natürliche Zahl $n = n(s)$ gibt, so dass $A^n s = 0$ ist. Aus Satz 10 ergibt sich mit $\mathfrak{P} = \{z, z^2, \dots\}$ das

Corollar 6: Ist A ein quasinilpotenter Operator auf $\mathfrak{T}$, so ist $\nu(A - \zeta I) = \beta(A - \zeta I) = 0$ für alle $\zeta \neq 0$.

Durch die folgende Definition führen wir die für das

8) Diese Definition wird in Williamson [21], Lemma 3 gegeben.

Weitere grundlegenden Begriffe des finiten und vollfiniten Operators ein.

Definition: Der Operator A auf $\mathfrak{T}$ heisse finit,[9] wenn

(24) $\nu(A - \zeta I) = \beta(A - \zeta I) < \infty$ für alle $\zeta \neq 0$

ist. Erfüllt ausserdem $A - \zeta I$ für alle $\zeta \neq 0$ die Kettenbedingungen, so heisse A vollfinit.

Im Satz 13 werden wir Beispiele für finite und nicht finite Operatoren angeben.

Satz 11: Es sei $p(z)$ ein Polynom mit $p(0) = 0$. Ist A finit bzw. vollfinit, so ist auch $p(A)$ finit bzw. vollfinit.

Beweis: Ist $\zeta \neq 0$, so ist Null keine Nullstelle des Polynoms $p(z) - \zeta$. In der kanonischen Produktdarstellung

(25) $$p(z) - \zeta = \prod_{\varrho=1}^{r} (z - z_\varrho)^{\lambda_\varrho}$$

des Polynoms $p(z) - \zeta$ sind daher alle $z_\varrho \neq 0$. Aus (25) folgt

$$p(A) - \zeta I = \prod_{\varrho=1}^{r} (A - z_\varrho I)^{\lambda_\varrho} .$$

Ist A finit, so ist $\nu(A - z_\varrho I) = \beta(A - z_\varrho I) < \infty$ für $\varrho = 1, .., r$ da $z_\varrho \neq 0$ ist. Daher findet man durch wiederholte Anwendung des Satzes 8, dass $\nu(p(A) - \zeta I) = \beta(p(A) - \zeta I) < \infty$ ist. Also ist $p(A)$ finit. Ist A vollfinit, so folgt ebenso aus Satz 8, dass auch $p(A)$ vollfinit ist.

Satz 12: Ist für ein Polynom $p(z)$ der Operator $p(A)$ vollfinit, so erfüllt $A - \zeta I$ für alle ζ, die von den Nullstellen des Polynoms $p(z)$ verschieden sind, die Defektrelation $\nu(A - \zeta I) = \beta(A - \zeta I) < \infty$ und beide Kettenbedingungen.[10]

Beweis: Es sei ζ keine Nullstelle von $p(z)$, also $p(\zeta) \neq 0$.

[9] Wielandt [20] führte die Bezeichnung endlichartig statt finit ein.

[10] Ist $p(0) \neq 0$, so darf ζ insbesondere auch den Wert 0 annehmen.

Da ζ eine Nullstelle des Polynoms $p(z) - \eta$ ist, gibt es ein Polynom $p_1(z)$, so dass

$$p(z) - \eta = (z - \zeta)p_1(z)$$

ist. Daraus folgt die Gleichung

$$p(A) - \eta I = (A - \zeta I)p_1(A). \tag{26}$$

Da $p(A)$ vollfinit und $\eta \neq 0$ ist, erfüllt $p(A) - \eta I$ die Defektrelation $\nu(p(A) - \eta I) = \beta(p(A) - \eta I) < \infty$ und beide Kettenbedingungen. Beachtet man noch, dass die Polynome in A einen kommutativen Ring bilden, so folgt daraus zusammen mit (26) und Satz 8, dass $\nu(A - \zeta I) = \beta(A - \zeta I) < \infty$ ist und $A - \zeta I$ beide Kettenbedingungen erfüllt.

Corollar 7: Mit A sind auch die Iterierten A^n für $n \geq 1$ finit bzw. vollfinit. Ist A^n für eine natürliche Zahl n vollfinit, so ist auch A vollfinit.

Der Beweis ergibt sich aus den Sätzen 11 und 12, indem man $p(z) = z^n$ wählt.

Im folgenden Satz wollen wir einige Klassen von finiten und nicht finiten Operatoren angeben. Dabei benützen wir die folgenden Definitionen:

Ein Operator A heisst idempotent, wenn $A^2 = A$ ist. Gibt es für einen Operator A eine natürliche Zahl n, so dass $A^n = I$ ist, so heisst A ein Operator von endlicher Ordnung.

Satz 13: Quasinilpotente Operatoren und Operatoren von endlichem Rang sind vollfinit. Ein idempotenter Operator ist genau dann finit, wenn er von endlichem Rang ist. Ein Operator von endlicher Ordnung ist niemals finit, falls $\mathfrak{T}$ von unendlicher Dimension ist.

Beweis: Die Behauptung folgt für quasinilpotente Operatoren aus Corollar 6, für Operatoren von endlichem Rang aus Corollar 3. Daher ist ein idempotenter Operator A gewiss dann finit, wenn er von endlichem Rang ist. Ist er jedoch nicht von endlichem Rang, so ist $\nu(A - I) = [\aleph(I - A)] = [A\tau] = \infty$, und daher kann A nicht finit sein. Die letzte Behauptung des Satzes folgt aus Corollar 7, weil auf einem linearen System von unendlicher Dimension der identische Operator I nicht finit ist.

§3. Finite Operatoren auf normierten linearen Räumen.

Das Hauptziel dieses Paragraphen ist, die vollfiniten Operatoren - mit gewissen zusätzlichen Voraussetzungen versehen - spektral zu charakterisieren. Vorher aber wollen wir noch einige Bemerkungen über Homomorphismen eines Banach-Raumes mit endlichen Defekten machen.

Ein Homomorphismus eines Banach-Raumes $\mathfrak{X}$ ist ein beschränkter Operator T auf $\mathfrak{X}$, dessen Bildbereich abgeschlossen ist. Die Bedeutung dieser Annahme über den Bildbereich von T hat zuerst Hausdorff [8] untersucht und geklärt: sie ist gleichbedeutend mit der sogenannten normalen Auflösbarkeit der Gleichung $Tx = s$. Dabei heisst eine solche Gleichung normal auflösbar, wenn sie für genau diejenigen $s \in \mathfrak{X}$ lösbar ist, die orthogonal zum Kern des zu T adjungierten Operators T^* sind, d.s. diejenigen $s \in \mathfrak{X}$, für die $F(s) = 0$ für alle beschränkten linearen Funktionale F auf $\mathfrak{X}$ mit $T^*F = 0$. Dieser Begriff ist dann näher untersucht worden von Atkinson [1] und - im Hilbertschen Raum - von Gochberg [6]. In diesen Untersuchungen wird angenommen, dass die Kerne von T und T^* endliche Dimension haben[1]. Unter diesen Voraussetzungen besteht aber ein enger Zusammenhang zwischen den Defekten von T und T^*, es gilt nämlich: Der beschränkte Operator T auf dem Banach-Raum $\mathfrak{X}$ ist genau dann ein Homomorphismus mit endlichem Nulldefekt $\nu(T) = m$, wenn T^* ein Homomorphismus mit endlichem Bilddefekt $\beta(T^*) = m$ ist, und - dual dazu - T ist genau dann ein Homomorphismus mit endlichem Bilddefekt $\beta(T) = n$, wenn T^* ein Homomorphismus mit

[1] Vgl. auch die Einleitung zu Atkinson [2], wo eine Uebersicht nach steigender Allgemeinheit über die Voraussetzungen gegeben ist, denen die Operatoren bei Auflösbarkeitsuntersuchungen gewöhnlich unterworfen werden.

endlichem Nulldefekt $\nu(T') = n$ ist (vgl. Dieudonné [4] und Yood [22]). Mit Hilfe der Theoreme 8 und 9 aus Banach [3], S. 149 ff und der Hausdorffschen Ergebnisse (vgl. auch Hille [9], Theorem 2.13.6) schliesst man daraus leicht, dass der beschränkte Operator T auf einem Banach-Raum $\mathfrak{T}$ genau dann den Fredholmschen Lösungssätzen genügt, wenn T ein Homomorphismus und $\nu(T) \cdot \beta(T) < \infty$ ist. Diese Bemerkung lehrt also, dass man die Klasse der "Fredholmschen Operatoren" charakterisieren kan, ohne den Begriff des adjungierten Operators zu benutzen.

Bevor wir zur Untersuchung der beschränkten finiten Operatoren übergehen, erinnern wir an die Definition der Resolventenmenge und des Spektrums einer beliebigen, nicht notwendig beschränkten linearen Transformation A, die auf einem linearen Untersystem $\mathfrak{U}$ des Banach-Raumes $\mathfrak{T}$ definiert ist und deren Bildbereich $A\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{T}$ liegt[2].

Definition: Die Resolventenmenge Rm(A) besteht aus den Werten von ξ, für die $A - \xi I$ eine beschränkte und dicht in $\mathfrak{T}$ definierte Inverse $(A - \xi I)^{-1}$ besitzt. $R_\xi = (A - \xi I)^{-1}$ heisst die Resolvente von A. Das Spektrum Sp(A) besteht aus den Werten von ξ, die nicht zu Rm(A) gehören. Sp(A) zerfällt in drei paarweise fremde Teilmengen, nämlich in das kontinuierliche Spektrum KSp(A), das Residualspektrum RSp(A) und das Punktspektrum PSp(A). KSp(A) besteht aus den Werten von ξ, für die $A - \xi I$ eine unbeschränkte und dicht in $\mathfrak{T}$ definierte Inverse besitzt, RSp(A) besteht aus den Werten von ξ, für die $A - \xi I$ eine Inverse besitzt, die in $\mathfrak{T}$ nicht dicht definiert ist, PSp(A) besteht aus den Werten von ξ, für die $A - \xi I$ keine

[2] Wir haben es in diesem Paragraphen zwar nur mit beschränkten Operatoren zu tun, fassen aber für die Zwecke des §5 die spektraltheoretischen Begriffe gleich in ihrer allgemeinsten Form.

Inverse besitzt. Die Punkte ζ des Punktspektrums heissen auch Eigenwerte von A.

Die Resolventenmenge eines beschränkten Operators lässt sich noch auf eine andere, für unsere Zwecke nützlichere Weise charakterisieren, wie der folgende Hilfssatz lehrt.

Hilfssatz 1: Es sei A ein beschränkter Operator auf dem Banach-Raum $\mathfrak{T}$. Genau dann ist $\zeta \in Rm(A)$, wenn $\nu(A-\zeta I)\cdot\beta(A-\zeta I)=0$ ist.

Beweis: Es sei $\zeta \in Rm(A)$. Dann ist trivialerweise $\nu(A-\zeta I)=0$. Da A auf ganz $\mathfrak{T}$ definiert und beschränkt ist, ist die Resolvente R_ζ ebenfalls auf ganz $\mathfrak{T}$ definiert[3], $A-\zeta I$ bildet also $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{T}$ ab, d.h. es ist $\beta(A-\zeta I)=0$.

Nun sei umgekehrt $\nu(A-\zeta I)=\beta(A-\zeta I)=0$ für eine komplexe Zahl ζ. $A-\zeta I$ bildet also $\mathfrak{T}$ eineindeutig auf $\mathfrak{T}$ ab. Daraus folgt wegen der Beschränktheit von $A-\zeta I$ nach Banach [3], S. 41, Théorème 5, dass $(A-\zeta I)^{-1}$ beschränkt ist. Also gehört ζ zu Rm(A).

Wir machen nun noch einige Bemerkungen über den wichtigen Begriff des Eigenwertes.

Man sieht leicht, dass ζ genau dann ein Eigenwert von A ist, wenn $\nu(A-\zeta I)>0$ ist, d.h. wenn es ein Element $e \neq 0$ gibt, so dass $(A-\zeta I)e=0$ ist. Ein solches Element e heisst Eigenlösung oder Eigenelement von A zum Eigenwert ζ. Die Eigenlösung e heisst normiert, wenn $\|e\|=1$ ist[4]. Der von allen Eigenlösungen zu einem Eigenwert ζ aufgespannte

3) Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 405.

4) Mit $\|s\|$ bezeichnen wir die Norm des Elementes s im Banach-Raum $\mathfrak{T}$.

Unterraum[5] von $\mathfrak{T}$ heisst der Eigenraum zum Eigenwert ξ, seine Dimension heisst die Vielfachheit von ξ. Ist A ein beschränkter Operator, so stimmt der Eigenraum zum Eigenwert ξ mit $\mathfrak{K}(A - \xi I)$ überein. Wir wollen sagen, dass die Eigenwerte von A höchstens eine Nullfolge bilden, wenn A entweder nur endlich viele - eventuell überhaupt keine - Eigenwerte besitzt oder die Eigenwerte von A gegen Null konvergieren.

Der folgende einfache Satz gibt eine erste Uebersicht über das Spektrum eines beschränkten finiten Operators.

Satz 1: Ist A ein beschränkter finiter Operator auf dem Banach-Raum $\mathfrak{T}$, so sind die von Null verschiedenen Punkte seines Spektrums sämtlich Eigenwerte endlicher Vielfachheit.

Beweis: Ist $\nu(A - \xi I) = 0$ für ein $\xi \neq 0$, so ist auch $\rho(A - \xi I) = 0$, weil A finit ist. Nach Hilfssatz 1 gehört daher ξ zu $\mathrm{Rm}(A)$. Für jeden von Null verschiedenen Punkt λ aus $\mathrm{Sp}(A)$ muss also $\nu(A - \lambda I) > 0$ sein, d.h. jeder derartige Punkt λ ist Eigenwert von A. Der Kern von $A - \lambda I$ hat wegen $\nu(A - \lambda I) < \infty$ endliche Dimension. Da er wegen der Beschränktheit von A mit dem Eigenraum zu λ übereinstimmt, ist also dessen Dimension endlich, d.h. der Eigenwert λ hat endliche Vielfachheit.

Zur weiteren Untersuchung der spektralen Eigenschaften beschränkter finiter Operatoren benötigen wir noch zwei Hilfssätze und einen Zerlegungssatz, den wir als Spektralsatz bezeichnen wollen.

---

[5] Ein Unterraum ist ein abgeschlossenes lineares Untersystem. Ein Unterraum eines Banach-Raumes ist selbst ein Banach-Raum. Jedes Untersystem endlicher Dimension eines Banach-Raumes ist ein Unterraum.

Hilfssatz 2: Ist T ein beschränkter Operator auf dem Banach-Raum $\mathfrak{X}$, ist $\nu(T) < \infty$ und $\mathfrak{Z}(T)$ abgeschlossen, so ist auch $\mathfrak{Z}(T^n)$ für jedes natürliche n abgeschlossen.

Dieser Hilfssatz folgt aus Yood [22], Theorem 3.4.

Hilfssatz 3: Erfüllt der Operator $A - \eta I$ auf dem linearen System $\mathfrak{X}$ für eine beliebige feste Zahl η beide Kettenbedingungen mit der Kettenlänge p, so gilt für alle $\xi \neq \eta$ und alle $n \geq 0$ die Ungleichung

$$\mathfrak{K}((A-\xi I)^n) \subseteq \mathfrak{Z}((A-\eta I)^p).$$

Beweis: Indem wir die Zerlegung von $\mathfrak{X}$ nach §1, Hilfssatz 8 benutzen, stellen wir jedes $s \in \mathfrak{K}((A - \xi I)^n)$ als Summe

$$s = b + k \quad \text{mit } b \in \mathfrak{Z}((A - \eta I)^p),\ k \in \mathfrak{K}((A - \eta I)^p)$$

dar. Daraus folgt

$$(A - \xi I)^n b = - (A - \xi I)^n k.$$

Da $\mathfrak{K}((A - \eta I)^p)$ und $\mathfrak{Z}((A - \eta I)^p)$ unter $(A - \xi I)^n$ invariant sind und nur das Nullelement gemeinsam haben, folgt daraus $(A - \xi I)^n k = 0$. Wegen $\xi \neq \eta$ ist nach §1, Hilfssatz 9

$$\mathfrak{K}((A-\eta I)^p) \cap \mathfrak{K}((A-\xi I)^n) = 0.$$

Somit ist $k = 0$ und $s = b \in \mathfrak{Z}((A - \eta I)^p)$.

Spektralsatz:[6] Es sei A ein beschränkter Operator auf dem Banach-Raum $\mathfrak{X}$ und ξ ein isolierter Punkt seines Spektrums. Dann gibt es zwei Unterräume $\mathfrak{Z}_\xi$ und $\mathfrak{K}_\xi$ von $\mathfrak{X}$, so dass folgendes gilt:

(1) Es ist $\mathfrak{X} = \mathfrak{Z}_\xi + \mathfrak{K}_\xi$ und $\mathfrak{Z}_\xi \cap \mathfrak{K}_\xi = 0$.

(2) A bildet $\mathfrak{Z}_\xi$ und $\mathfrak{K}_\xi$ in sich ab.

(3) Ist A' die Einschränkung von A auf $\mathfrak{Z}_\xi$, A'' die Einschränkung von A auf $\mathfrak{K}_\xi$, so ist $\mathrm{Sp}(A') = \mathrm{Sp}(A) - \{\xi\}$ [7] und $\mathrm{Sp}(A'') = \{\xi\}$.

6) Beweis (für einen etwas allgemeineren Satz) bei Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 410. - 7) Das Minuszeichen bedeute die Restmengenbildung.

(4) Die Projektion Q von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{L}_\zeta$ längs $\mathfrak{L}_\zeta$ ist ein beschränkter Operator und wird gegeben durch

$$Q = -\frac{1}{2\pi i}\oint (A - \lambda I)^{-1} d\lambda ,$$

wobei das Integral über einen Kreis zu erstrecken ist, der ganz in Rm(A) verläuft und von Sp(A) nur den Punkt ζ in seinem Inneren enthält. i ist die imaginäre Einheit.

Dieser Satz ist die Grundlage der folgenden Definition: Ein Punkt ζ aus dem Spektrum eines beschränkten Operators A auf dem Banach-Raum $\mathfrak{T}$ besitzt die Quasivielfachheit q, wenn er erstens ein isolierter Punkt des Spektrums ist und zweitens der oben eingeführte Raum $\mathfrak{L}_\zeta = Q\mathfrak{T}$ die Dimension q besitzt.

Mit diesem Begriff können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz 2: Genau dann hat jeder von Null verschiedene Punkt aus dem Spektrum eines beschränkten Operators A auf dem Banach-Raum $\mathfrak{T}$ endliche Quasivielfachheit, wenn A vollfinit und $\mathfrak{Z}(A - \zeta I)$ für alle $\zeta \neq 0$ abgeschlossen ist.

Beweis: Es sei A vollfinit und $\mathfrak{Z}(A - \zeta I)$ für jedes $\zeta \neq 0$ abgeschlossen. Wir zeigen zuerst, dass ein Punkt $\zeta \neq 0$ aus Sp(A) ein isolierter Punkt des Spektrums ist.

Angenommen, ζ sei nicht isoliert, d.h. es gebe eine Folge von Punkten $\zeta_n \in Sp(A)$, die gegen ζ konvergiert. Da $\zeta \neq 0$ ist, können wir annehmen, dass alle $\zeta_n \neq 0$ sind. Nach Satz 1 sind sie also Eigenwerte von A. Es sei e_n eine zu ζ_n gehörende normierte Eigenlösung, also

$$(A - \zeta_n I)e_n = 0 \quad \text{und} \quad \|e_n\| = 1.$$

Dann ist

$$(A - \zeta I)e_n = (A - \zeta_n I)e_n + (\zeta_n - \zeta)e_n = (\zeta_n - \zeta)e_n,$$

und daraus folgt

$$\|(A - \zeta I)e_n\| = |\zeta_n - \zeta| \cdot \|e_n\| = |\zeta_n - \zeta| \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Ist p die Kettenlänge[8] von $A - \zeta I$, so liegen nach Hilfssatz 3 alle e_n in $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}((A - \zeta I)^p)$, und nach §1, Hilfssatz 8 bildet $A - \zeta I$ das System $\mathfrak{L}$ eineindeutig auf sich ab; für die Einschränkung $A' - \zeta I'$ von $A - \zeta I$ auf $\mathfrak{L}$ gilt also $\nu(A' - \zeta I') = \beta(A' - \zeta I') = 0$. Da ausserdem $\mathfrak{L}$ nach Hilfssatz 2 abgeschlossen, also ein Banach-Raum ist, gehört nach Hilfssatz 1 ζ zu $\mathrm{Rm}(A')$. Die Inverse $(A' - \zeta I')^{-1}$ ist also beschränkt. Aus

$$(A - \zeta I)e_n = (A' - \zeta I')e_n \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

folgt daher

$$(A' - \zeta I')^{-1}(A' - \zeta I')e_n = e_n \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

im Widerspruch zur Normierung $\|e_n\| = 1$. In der Tat ist also ζ ein isolierter Punkt des Spektrums von A.

Wir können daher auf ζ den Spektralsatz anwenden und erhalten damit die Zerlegung

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_\zeta + \mathfrak{K}_\zeta \quad \text{mit} \quad \mathfrak{L}_\zeta \perp \mathfrak{K}_\zeta.$$

Es ist zu zeigen, dass $[\mathfrak{K}_\zeta] < \infty$ ist. Das geschieht, indem wir die Gleichung $\mathfrak{K}_\zeta = \mathfrak{K}((A-\zeta I)^p)$ beweisen, wobei p die zu $A - \zeta I$ gehörende Kettenlänge ist. $\mathfrak{K}((A - \zeta I)^p)$ ist nämlich wegen der Vollfinitheit von A nach §1, Hilfssatz 8 von endlicher Dimension.

Jedes $s \in \mathfrak{K}((A - \zeta I)^n)$, $n \geq 0$, kann nach (1) in der Form

$$s = b + k \quad \text{mit } b \in \mathfrak{L}_\zeta \ , \ k \in \mathfrak{K}_\zeta$$

---

[8] Wir können einfach von der Kettenlänge reden, da nach §2, Corollar 1 die erste und zweite Kettenlänge von $A - \zeta I$ übereinstimmen. Unausgesprochen stützen wir uns im Weiteren überall dort auf dieses Corollar, wo wir von der Kettenlänge eines Operators reden.

dargestellt werden. Wendet man auf diese Darstellung den Operator $(A - \zeta I)^n$ an, so folgt

(5) $\qquad (A - \zeta I)^n b = - (A - \zeta I)^n k.$

Da nach (2) die Systeme $\mathfrak{L}_\zeta$ und $\mathfrak{K}_\zeta$ unter A invariant sind und ferner $\mathfrak{L}_\zeta \cap \mathfrak{K}_\zeta = 0$ ist, folgt aus (5), dass

(6) $\qquad (A - \zeta I)^n b = 0$

ist. Nach (3) gehört ζ zu $\mathrm{Rm}(A')$, mit Hilfssatz 1 folgt daraus, dass $A - \zeta I$ das System $\mathfrak{L}_\zeta$ eineindeutig auf sich abbildet. Wegen (6) ist also $b = 0$, d.h. $s = k \in \mathfrak{K}_\zeta$. Daher ist

(7) $\qquad \mathfrak{K}((A - \zeta I)^n) \subseteq \mathfrak{K}_\zeta \qquad$ für $n \geq 0$.

Insbesondere liegt $\mathfrak{K}((A - \zeta I)^p)$ in $\mathfrak{K}_\zeta$.

Aus (1), (2) und §2, Corollar 5 folgt, dass die Einschränkung $A'' - \zeta I''$ von $A - \zeta I$ auf den Banach-Raum $\mathfrak{K}_\zeta$ die Defektrelation

(8) $\qquad \nu(A'' - \zeta I'') = \beta(A'' - \zeta I'') < \infty$

und beide Kettenbedingungen erfüllt. Da wegen (7)

(9) $\qquad \mathfrak{K}((A'' - \zeta I'')^n) = \mathfrak{K}((A - \zeta I)^n) \qquad$ für $n \geq 0$

ist, muss die Kettenlänge von $A'' - \zeta I''$ gleich der Kettenlänge p von $A - \zeta I$ sein. Nach (3) gehört jeder von ζ verschiedene Punkt η zu $\mathrm{Rm}(A'')$, nach Hilfssatz 1 ist daher

(10) $\qquad \nu(A'' - \eta I'') = \beta(A'' - \eta I'') = 0$ für $\eta \neq \zeta$

Aus (8) (und dem dortigen Zusatz über die Kettenbedingungen) und (10) folgt, dass $A'' - \lambda I''$ für <u>alle</u> λ die Defektrelation

(11) $\qquad \nu(A'' - \lambda I'') = \beta(A'' - \lambda I'') < \infty$

und beide Kettenbedingungen erfüllt.

Da die Kettenlänge von $A'' - \zeta I''$, wie wir oben gesehen haben, gleich p ist, besteht nach §1, Hilfssatz 8 und nach Gleichung (9) die Zerlegung

(12) $\mathfrak{K}_\zeta = \mathfrak{K}((A - \zeta I)^p) + \mathfrak{L}((A'' - \zeta I'')^p)$ mit $\mathfrak{K}((A - \zeta I)^p) \cap \mathfrak{L}((A'' - \zeta I'')^p) = 0$;

dabei ist $[\mathfrak{K}((A - \zeta I)^p)] < \infty$. Bedeutet A''' die Einschränkung

von A" auf $\mathfrak{L}((A'' - \zeta I'')^p)$, so ist nach (11) und §2, Corollar 5

(13) $\qquad \nu(A''' - \lambda I''') = \beta(A''' - \lambda I''') < \infty$ für alle λ .

Aus (10) folgt, dass $\nu(A''' - \eta I''') = 0$ ist für alle $\eta \neq \zeta$, aus (12) folgt, dass $\nu(A''' - \zeta I''') = 0$ ist. Daraus folgt wegen (13) die Defektrelation

(14) $\qquad (A''' - \lambda I''') = \beta(A''' - \lambda I''') = 0$ für alle λ .

Wegen $\mathfrak{L}(A'' - \zeta I'') = \mathfrak{K}_\zeta \cap \mathfrak{L}(A - \zeta I)$ ist $\mathfrak{L}(A'' - \zeta I'')$ abgeschlossen, nach Hilfssatz 2 ist also auch $\mathfrak{L}((A'' - \zeta I'')^p)$ abgeschlossen, also ein Banach-Raum. Daraus und aus (13) folgt nach Hilfssatz 1, dass jede Zahl λ zu $Rm(A''')$ gehört, d.h. dass $Sp(A''')$ leer ist. Daher ist $\mathfrak{L}((A'' - \zeta I'')^p) = 0$[9], nach (12) also $\mathfrak{K}_\zeta = \mathfrak{K}((A - \zeta I)^p)$, wie wir behauptet hatten.

Nun besitze umgekehrt jeder von Null verschiedene Punkt ζ aus dem Spektrum des beschränkten Operators A auf dem Banach-Raum $\mathfrak{X}$ endliche Quasivielfachheit, d.h. ζ sei ein isolierter Punkt des Spektrums von A und in der Zerlegung (1) sei $\mathfrak{K}_\zeta$ von endlicher Dimension. Nach (3) gehört ζ zur Resolventenmenge von A', der Einschränkung von A auf den Banach-Raum $\mathfrak{X}_\zeta$, daher ist nach Hilfssatz 1

(15) $\qquad \nu(A' - \zeta I') = \beta(A' - \zeta I') = 0,$

und $A' - \zeta I'$ erfüllt trivialerweise beide Kettenbedingungen. Wegen $[\mathfrak{K}_\zeta] < \infty$ ist, wenn A" die Einschränkung von A auf $\mathfrak{K}_\zeta$ bedeutet,

$$\nu(A'' - \zeta I'') = \beta(A'' - \zeta I'') < \infty,$$

und $A'' - \zeta I''$ erfüllt beide Kettenbedingungen. Aus diesen Ergebnissen über $A' - \zeta I'$ und $A'' - \zeta I''$ folgt nach §2, Corollar 5, dass auch $A - \zeta I$ die Defektrelation

(16) $\qquad \nu(A - \zeta I) = \beta(A - \zeta I) < \infty$

---

9) Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 407.

und beide Kettenbedingungen erfüllt.

Nun wollen wir zeigen, dass $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ abgeschlossen ist. Auf Grund unserer Voraussetzungen ist die Aussage (b) des Satzes 7 in §2 mit $T = A - \zeta I$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_\zeta$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_\zeta$ erfüllt[10]. Daher gibt es nach §2, Corollar 4 einen Operator S von endlichem Rang, so dass

(17) $$\mathfrak{k}(A - \zeta I) = \mathfrak{k}(S - \zeta I)$$

ist, dabei ist, wenn Q die Projektion von $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}_\zeta$ längs $\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}_\zeta$ ist

(18) $$S = (A - \zeta I)Q + \zeta Q = AQ.$$

Da Q mit der in (4) definierten Projektion übereinstimmt, ist Q beschränkt, nach (18) ist also auch S beschränkt. Da ein beschränkter Operator von endlichem Rang vollstetig ist, ist nach der Rieszschen Theorie der vollstetigen Operatoren $\mathfrak{k}(S - \zeta I)$, nach (17) also auch $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ abgeschlossen.

Damit haben wir bisher bewiesen: Für jeden Punkt $\zeta \neq 0$ aus Sp(A) erfüllt $A - \zeta I$ die Defektrelation (16) und beide Kettenbedingungen; $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ ist abgeschlossen.

Ist aber $\zeta \in Rm(A)$, so ist nach Hilfssatz 1

$$\nu(A - \zeta I) = \rho(A - \zeta I) = 0$$

und damit trivialerweise auch jede Kettenbedingung erfüllt und $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ abgeschlossen.

Die beiden letzten Absätze besagen zusammengenommen, dass A vollfinit und $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ für jedes $\zeta \neq 0$ abgeschlossen ist.

Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen.

---

10) Dass $A - \zeta I$ das System $\mathfrak{k}_\zeta$ eineindeutig auf sich abbildet, ist gerade der Inhalt von (15).

Anmerkung: Ruston [15] hat gezeigt, dass sich die vollfiniten beschränkten Operatoren A, bei denen $\mathfrak{L}(A - \zeta I)$ für jedes $\zeta \neq 0$ abgeschlossen ist, noch auf eine andere Weise charakterisieren lassen: es sind genau die asymptotisch quasivollstetigen Operatoren, d.h. diejenigen Operatoren A, für die $\lim_{n\to\infty}[\varkappa(A^n)]^{\frac{1}{n}} = 0$ ist, dabei ist $\varkappa(T) = \operatorname{fin} \|T - V\|$, wo V alle vollstetigen Operatoren auf $\mathfrak{T}$ durchläuft.

Beachtet man, dass das Spektrum eines beschränkten Operators auf einem Banach-Raum $\mathfrak{T}$ beschränkt und abgeschlossen ist[11], so ergibt sich aus Satz 1 und 2, wie man leicht sieht, der folgende Satz.

Satz 3: Ist A ein vollfiniter beschränkter Operator auf einem Banach-Raum $\mathfrak{T}$ und ist $\mathfrak{L}(A - \zeta I)$ für alle $\zeta \neq 0$ abgeschlossen, so besteht $Sp(A) - \{0\}$ nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit und diese Eigenwerte bilden höchstens eine Nullfolge.

---

11) Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 408.

§4. Normale und symmetrisierbare finite Operatoren.

Für die folgenden Betrachtungen legen wir einen Hilbert-Raum[1] $\mathfrak{H}$ zugrunde und untersuchen zunächst normale Operatoren auf $\mathfrak{H}$, d.h. beschränkte Operatoren N, die mit ihrem adjungierten Operator N^* vertauschbar sind[2].

Einleitend stellen wir einige geläufige Eigenschaften adjungierter und normaler Operatoren zusammen, die wir im folgenden benötigen werden.

(1) Für jeden beschränkten Operator T auf $\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{K}(T)$ orthogonal zu $\mathfrak{B}(T^*)$ und $\mathfrak{K}(T^*)$ orthogonal zu $\mathfrak{B}(T)$.

Denn ist $k \in \mathfrak{K}(T)$, so ist

$$(k, T^*s) = (Tk, s) = (0, s) = 0,$$

womit die erste Behauptung bewiesen ist. Wegen $(T^*)^* = T$ ist die zweite Behauptung eine unmittelbare Folge der ersten.

(2) Ist N ein normaler Operator, so ist $\mathfrak{K}(N) = \mathfrak{K}(N^*)$.

Für jedes $s \in \mathfrak{H}$ ist nämlich

$$\|Ns\|^2 = (Ns, Ns) = (N^*Ns, s) = (NN^*s, s) = (N^*s, N^*s) = \|N^*s\|^2,$$

also $\|Ns\| = \|N^*s\|$, woraus die Behauptung leicht folgt.

(3) Für jeden normalen Operator N ist $\mathfrak{K}(N)$ orthogonal zu $\mathfrak{B}(N)$, insbesondere ist also $\mathfrak{K}(N) \cap \mathfrak{B}(N) = 0$.

Diese Behauptung folgt aus (1) und (2)

(4) Mit N ist auch $N - \zeta I$ für jedes ζ normal.

Das ist trivial.

(5) Eine Eigenlösung e eines normalen Operators N zum Eigen-

1) Ein Hilbert-Raum soll, falls nichts anderes gesagt ist, immer ein vollständiger Raum sein.
2) T^* bedeute den zu T adjungierten Operator. Siehe wegen der Definition Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 199.

wert ζ ist Eigenlösung von N^* zum Eigenwert $\bar{\zeta}$. Zwei Eigenlösungen e_1, e_2 von N zu verschiedenen Eigenwerten ζ_1 , ζ_2 sind zueinander orthogonal.

Beweis: Wegen (2) und (3) ist $\mathfrak{K}(N - \zeta I) = \mathfrak{K}(N^* - \bar{\zeta} I)$, woraus die erste Behauptung folgt. Insbesondere ist also e_2 Eigenlösung von N^* zu $\bar{\zeta}_2$, d.h. es ist $N^* e_2 = \bar{\zeta}_2 e_2$. Daraus und aus $Ne_1 = \zeta_1 e_1$ folgt die Gleichungskette

$\zeta_1(e_1, e_2) = (\zeta_1 e_1, e_2) = (Ne_1, e_2) = (e_1, N^* e_2) = (e_1, \bar{\zeta}_2 e_2) = \zeta_2(e_1, e_2)$.

Wegen $\zeta_1 \neq \zeta_2$ folgt aus der Gleichheit der beiden äussersten Glieder dieser Kette die Behauptung $(e_1, e_2) = 0$.

Ist N ein normaler Operator, so ist nach (3) und (4)

$$\mathfrak{K}(N - \zeta I) \cap \mathfrak{L}(N - \zeta I) = 0.$$

Jede Basis von $\mathfrak{K}(N - \zeta I)$ besteht also aus Elementen, die über $\mathfrak{L}(N - \zeta I)$ linear unabhängig sind. Ist N ausserdem finit und $\zeta \neq 0$, so ist wegen $\nu(N - \zeta I) = \beta(N - \zeta I) < \infty$ jede Basis von $\mathfrak{K}(N - \zeta I)$ ein maximales System von über $\mathfrak{L}(N - \zeta I)$ linear unabhängigen Elementen, also eine Basis von $\mathfrak{H}$ über $\mathfrak{L}(N - \zeta I)$. Nach §1, Hilfssatz 1 besteht daher für $\zeta \neq 0$ die Zerlegung

(6) $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}(N - \zeta I) + \mathfrak{L}(N - \zeta I)$ mit $\mathfrak{K}(N - \zeta I) \cap \mathfrak{L}(N - \zeta I) = 0$.

Nach §1, Hilfssatz 6 folgt daraus, dass $N - \zeta I$ die 2. Kettenbedingung erfüllt. Nach §2, Satz 3 ist daher N vollfinit.

Nach (3) und (4) ist in der Zerlegung (6) der Kern $\mathfrak{K}(N - \zeta I)$ orthogonal zu $\mathfrak{L}(N - \zeta I)$. Wir wollen zeigen, dass aus dieser Eigenschaft zusammen mit (6) die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{L}(N - \zeta I)$ folgt. Es sei $b_n \in \mathfrak{L}(N - \zeta I)$ für $n = 1, 2, \ldots$, und es strebe $b_n \to s \in \mathfrak{H}$ für $n \to \infty$. Ist $k_0 \in \mathfrak{K}(N - \zeta I)$, so folgt

(7) $(k_0, s) = (k_0, \lim b_n) = \lim (k_0, b_n) = 0$,

d.h. s ist orthogonal zu $\mathfrak{L}(N - \zeta I)$. Wegen (6) ist

$$s = k + b \quad \text{mit } k \in \mathfrak{K}(N - \zeta I),\ b \in \mathfrak{L}(N - \zeta I).$$

Mit (7) (für $k = k_0$) folgt daraus

$$0 = (k,s) = (k,k) + (k,b) = (k,k).$$

Daher ist $k = 0$, d.h. $s = b \in \mathfrak{L}(N - \zeta I)$, und das bedeutet, dass $\mathfrak{L}(N - \zeta I)$ abgeschlossen ist.

Zusammengefasst haben wir also gesehen: Ist N ein normaler finiter Operator auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{T}$, so ist N vollfinit und $\mathfrak{L}(N - \zeta I)$ für jedes $\zeta \neq 0$ abgeschlossen. Daher können wir auf N den Satz 3 aus §3 anwenden. Aus ihm und der bekannten spektralen Charakterisierung normaler vollstetiger Operatoren[3] folgt, dass N vollstetig ist. Da umgekehrt ein vollstetiger Operator finit ist, gilt für normale finite Operatoren der folgende Satz:

Satz 1: Die Klasse der normalen finiten und die Klasse der normalen vollstetigen Operatoren auf einem Hilbert-Raum stimmen überein. Ein normaler Operator N auf $\mathfrak{T}$ ist genau dann finit, wenn $Sp(N) - \{0\}$ höchstens eine Nullfolge von Eigenwerten endlicher Vielfachheit ist.

Dieser Satz zeigt, dass im Falle normaler Operatoren der Begriff der Vollstetigkeit durch einen äquivalenten rein algebraischen Begriff ersetzt werden kann, nämlich durch den Begriff der Finitheit.

Satz 1 führt noch zu einer anderen spektralen Kennzeichnung der normalen finiten Operatoren, und zwar über invariante Unterräume. Es gilt nämlich:

[3] Vgl. etwa Sz.-Nagy [17].

Satz 2: Der normale Operator N auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ ist genau dann finit, wenn für jeden unter N invarianten Unterraum $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{H}$ die von Null verschiedenen Punkte des Spektrums von N', der Einschränkung von N auf $\mathfrak{U}$, Eigenwerte endlicher Vielfachheit sind.

Beweis: Ist N finit, so ist N nach Satz 1 vollstetig, also ist auch die Einschränkung N' von N auf einen invarianten Unterraum $\mathfrak{U}$ vollstetig und daher sind alle Punkte aus $Sp(N') - \{0\}$ Eigenwerte endlicher Vielfachheit. Die Bedingung des Satzes ist also notwendig.

Nun sei umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt. Da $\mathfrak{H}$ selbst ein invarianter Unterraum ist, besteht demnach $Sp(N) - \{0\}$ aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit. Um die Finitheit von N nachzuweisen, genügt es daher nach Satz 1 zu zeigen, dass diese Eigenwerte sich nur im Nullpunkt häufen können. Angenommen, es sei $\xi \neq 0$ ein Häufungspunkt von Eigenwerten des Operators N. Da Sp(N) abgeschlossen ist, gehört ξ zu Sp(N), ist also nach der eben gemachten Bemerkung über $Sp(N) - \{0\}$ ein Eigenwert von N. Es sei $\mathfrak{E}$ der zu ξ gehörende Eigenraum, $\mathfrak{E}^{\perp}$ das orthogonale Komplement zu $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{H}$ [4]. Wegen (5) gilt für jedes $e \in \mathfrak{E}$ die Gleichung $N^*e = \bar{\xi}e$, also liegt N^*e in $\mathfrak{E}$, d.h. $\mathfrak{E}$ ist unter N^* invariant. Wie man leicht sieht folgt daraus, dass $\mathfrak{E}^{\perp}$ unter N invariant ist. Es sei N' die Einschränkung von N auf $\mathfrak{E}^{\perp}$. Ist $\eta \neq \xi$ ein Eigenwert von N, so liegt nach (5) jede Eigenlösung e von N zu η in $\mathfrak{E}^{\perp}$, also ist $N'e = Ne = \eta e$. Jeder Eigenwert $\eta \neq \xi$ von N ist somit auch Eigenwert von N'. Daher ist ξ auch ein Häufungs-

4) Das orthogonale Komplement eines Unterraumes $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{H}$ ist die Menge aller Elemente von $\mathfrak{H}$, die zu $\mathfrak{U}$ (d.h. zu jedem Element von $\mathfrak{U}$) orthogonal sind. Wir bezeichnen es mit $\mathfrak{U}^{\perp}$. Es gilt dann die Zerlegung $\mathfrak{H} = \mathfrak{U} + \mathfrak{U}^{\perp}$, $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}^{\perp} = 0$. Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 70 und 197.

punkt von Eigenwerten des Operators N', gehört wegen der Abgeschlossenheit von Sp(N') also zu Sp(N') und ist somit nach der Voraussetzung Eigenwert von N'. Ist e' eine Eigenlösung von N' zu ζ, also N'e' = ζe', so ist auch Ne' = ζe', also ist e' auch Eigenlösung von N zu ζ. Da alle diese Eigenlösungen definitionsgemäss in $\mathfrak{k}$ liegen, ist e' $\in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{k}^{\perp}$. Wegen $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{k}^{\perp} = 0$ ist also e' = 0, im Widerspruch dazu, dass eine Eigenlösung von Null verschieden ist. Es kann also kein $\zeta \neq 0$ Häufungspunkt von Eigenwerten des Operators N sein, diese Eigenwerte können sich vielmehr nur im Nullpunkt häufen.

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Wir gehen nun zur Untersuchung der symmetrisierbaren Operatoren über. Zuerst haben wir zwei Definitionen zu geben und einige einfache Bemerkungen zu machen.

Eine lineare Transformation H, die auf einem linearen Untersystem $\mathfrak{U}$ des Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}$ definiert ist, heisst symmetrisch (oder Hermitesch), wenn für jedes Paar u,u' von Elementen aus $\mathfrak{U}$ die Gleichung (Hu,u') = (u,Hu') gilt. Ist H ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{H}$, so ist nach dem Satz von Hellinger-Toeplitz[5] H von selbst beschränkt. Ferner ist dann H = H*, also ist insbesondere H normal, so dass alle Bemerkungen, die wir am Anfang dieses Paragraphen über normale Operatoren gemacht haben, auch für symmetrische Operatoren auf $\mathfrak{H}$ gelten.

Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Operatoren sind die symmetrisierbaren Operatoren. Ein beschränkter Operator A auf $\mathfrak{H}$ heisst symmetrisierbar (genauer: links-symmetrisierbar)

5) Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 295.

durch den symmetrischen Operator H auf $\mathfrak{T}$, wenn HA symmetrisch ist.

Für Operatoren A, die in dieser Weise durch einen symmetrischen Operator H symmetrisierbar sind, gelten die folgenden beiden Bemerkungen:

1.) Sind e_1, e_2 Eigenlösungen von A zu den Eigenwerten ξ_1, ξ_2, so ist

(8) $\xi_1(e_1,He_2) = (Ae_1,He_2) = (HAe_1,e_2) = (e_1,HAe_2) = \bar{\xi}_2(e_1,He_2)$.

Ist $\xi_1 \neq \bar{\xi}_2$, so ist also $(e_1,He_2) = 0$. Besitzt A nur reelle Eigenwerte, so sind also zwei Eigenlösungen zu verschiedenen Eigenwerten stets H-orthogonal, wie wir die Beziehung $(e_1,He_2)=0$ kurz in Worten ausdrücken wollen.

2.) Ist keine Eigenlösung e zu einem nichtverschwindenden Eigenwert ξ von A zu sich selbst H-orthogonal, so sind alle Eigenwerte von A reell.

Denn für $e_1 = e_2 = e$, $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ folgt aus (8)

$$\xi(e,He) = \bar{\xi}(e,He).$$

Ist $(e,He) \neq 0$, so folgt daraus $\xi = \bar{\xi}$, also ist ξ reell.

A möge nun zusätzlich die in 2.) ausgesprochene Bedingung erfüllen, d.h. keine Eigenlösung zu einem Eigenwert $\neq 0$ von A sei zu sich selbst H-orthogonal, überdies sei A finit. Wir wollen zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen A sogar vollfinit und $\mathfrak{d}(A - \xi I)$ für jedes $\xi \neq 0$ abgeschlossen ist[6]. Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis für die entsprechende Aussage bei normalen finiten Operatoren (vgl. S. 57). Ist $\xi \neq 0$ kein Eigenwert von A, so ist $\rho(A - \xi I) = \nu(A - \xi I) = 0$, und daher ist es trivial, dass $A - \xi I$ die Kettenbedingungen

[6] Wegen Hilfssatz 2 (siehe S. 71) ist daher insbesondere ein durch $H \geq 0$ "vollsymmetrisierbarer" finiter Operator A vollfinit.

erfüllt und $\mathfrak{B}(A - \zeta I)$ abgeschlossen ist. Nun sei $\zeta \neq 0$ ein Eigenwert von A. Nach 2.) ist ζ reell, und daher ist $H(A - \zeta I)$ symmetrisch. Daraus folgt, dass

(9) $$\mathfrak{B}(A-\zeta I) \cap \mathfrak{N}(A-\zeta I) = 0$$

ist; denn ist $e \in \mathfrak{N}(A- \zeta I)$ und gleichzeitig $e = (A - \zeta I)s$, so ist

$$(e,He) = (e,H(A - \zeta I)s) = (H(A - \zeta I)e,s) = (0,s) = 0,$$

dank unserer Voraussetzung also $e = 0$. Wegen (9) und der Beziehung $\nu(A - \zeta I) = \beta(A - \zeta I) < \infty$ ist eine Basis von $\mathfrak{N}(A- \zeta I)$ auch eine Basis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{B}(A - \zeta I)$, also ist nach §1, Hilfssatz 1

(10) $$\mathfrak{T} = \mathfrak{B}(A-\zeta I) + \mathfrak{N}(A-\zeta I).$$

Nach §1, Hilfssatz 6 folgt daraus, dass $A - \zeta I$ die 2. Kettenbedingung erfüllt, nach §2, Satz 3 erfüllt daher $A - \zeta I$ auch die 1. Kettenbedingung.

Insgesamt ist also A vollfinit.

Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{B}(A - \zeta I)$ für jedes $\zeta \neq 0$ abgeschlossen ist. Es sei $b_n \in \mathfrak{B}(A - \zeta I)$ und $b_n \to s$ für $n \to \infty$. Nach (10) ist

$$s = b + e \quad \text{mit } b \in \mathfrak{B}(A - \zeta I),\ e \in \mathfrak{N}(A - \zeta I).$$

Daraus folgt

(11) $$(e,Hs) = (e,Hb) + (e,He).$$

Da mit $b_n = (A - \zeta I)s_n$, $b = (A - \zeta I)s'$ die Gleichungen

$$(e,Hs) = (e, \lim H(A - \zeta I)s_n) = \lim (H(A - \zeta I)e,s_n) = 0,$$

$$(e,Hb) = (e,H(A - \zeta I)s') = (H(A - \zeta I)e,s') = 0$$

gelten, folgt aus (11) die Gleichung $(e,He) = 0$, also ist $e = 0$. Daher ist $s = b$, womit die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{B}(A - \zeta I)$ bewiesen ist.

A ist also vollfinit, und $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ ist für jedes $\zeta \neq 0$ abgeschlossen. Nach §3, Satz 3 ist daher $Sp(A) - \{0\}$ höchstens eine Nullfolge von Eigenwerten endlicher Vielfachheit. Die Existenz von Eigenwerten werden wir erst später unter schärferen Voraussetzungen sicherstellen können.

Setzen wir schliesslich noch voraus, dass $H \geq 0$, d.h. dass $(Hs,s) \geq 0$ für alle $s \in \mathfrak{H}$ ist, so können wir in jedem Eigenraum zu einem Eigenwert $\zeta \neq 0$ von A eine H-orthonormale Basis konstruieren, d.h. eine Basis $e_1, \ldots e_\nu$ ($\nu = \nu(A - \zeta I)$ = Vielfachheit von ζ) mit der Eigenschaft $(e_m, He_n) = \delta_{mn}$; das Konstruktionsverfahren ist dem Schmidtschen Orthonormalisierungsprozess völlig analog. Bestimmen wir in allen Eigenräumen zu den Eigenwerten $\neq 0$ von A jeweils eine solche H-orthonormale Basis, so bildet die Vereinigungsmenge dieser Basen eine Menge von H-orthonormalen Elementen. Diese Menge nennen wir ein <u>Eigensystem</u> zu den Eigenwerten $\neq 0$ von A.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

<u>Satz 3</u>: A sei ein beschränkter finiter Operator auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$, durch den symmetrischen Operator H symmetrisierbar und keine Eigenlösung zu einem Eigenwert $\neq 0$ sei zu sich selbst H-orthogonal. Dann besitzt A entweder nur endlich viele - eventuell keine - Eigenwerte oder diese bilden eine Nullfolge. Ist überdies $H \geq 0$, so gibt es zu den von Null verschiedenen Eigenwerten ein H-orthonormales Eigensystem.

Als nächstes erhebt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen ein symmetrisierbarer finiter Operator einen Eigen-

wert besitzt. Eine einfache Eigenschaft symmetrischer Operatoren zeigt, dass jedenfalls der folgende Satz gilt:

Satz 4: Ist A ein beschränkter finiter Operator auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{T}$ und durch H symmetrisierbar, so besitzt A einen von Null verschiedenen Eigenwert, wenn H mit A vertauschbar und $HA \neq 0$ ist.

Zum Beweis benötigen wir die folgende einfache Bemerkung: Ist T ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{T}$, so ist

(12) $\quad \|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$ für $n = 1,2,\ldots$.

Da nämlich für jeden beschränkten Operator B die Gleichung $\|B^*B\| = \|B\|^2$ gilt [7], besteht für den symmetrischen Operator T wegen $T^* = T$ die Gleichung $\|T^2\| = \|T\|^2$, und daraus erhält man wegen der Symmetrie von T^k für $k \geq 0$ durch vollständige Induktion die Gleichung (12).

Nun der Beweis des Satzes 4! Wegen der Vertauschbarkeit von A und H ist

(13) $\quad \|(HA)^n\|^{\frac{1}{n}} = \|H^nA^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|H^n\|^{\frac{1}{n}} \cdot \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Hätte A keinen von Null verschiedenen Eigenwert, so enthielte nach §3, Satz 1 das Spektrum von A keinen von Null verschiedenen Punkt und daher wäre $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ [8]. Daraus und aus (13) folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \|(HA)^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ wäre. Also wäre auch $\lim_{k\to\infty} \|(HA)^{2^k}\|^{2^{-k}} = 0$, und da wegen der Symmetrie von HA nach (12) die Gleichung $\|(HA)^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|HA\|$ gilt, folgt daraus $\|HA\| = 0$, im Widerspruch zu $HA \neq 0$.

Der Satz 4 hat den Nachteil, dass er sich nicht zum Beweis eines Entwicklungssatzes verwenden lässt. Wir werden deshalb noch einen anderen Existenzsatz angeben, der weitere Konse-

[7] Vgl. Zaanen [24], S. 206.
[8] Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 414.

quenzen zulässt. Bei diesen nun folgenden Untersuchungen wird es sich als besonders nützlich erweisen, dass der Begriff des finiten Operators algebraisch, also unabhängig von irgendeiner Topologie des zugrundeliegenden Raumes erklärt ist. Konstruieren wir einen metrischen Raum $\mathfrak{R}$, indem wir in dem bisher betrachteten Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ eine neue Metrik einführen, so ist daher ein auf $\mathfrak{H}$ finiter Operator auch auf $\mathfrak{R}$ finit. Ist insbesondere A ein Operator auf $\mathfrak{H}$, der durch H symmetrisierbar ist und ist $H \geq 0$, so liegt es nahe, aus $\mathfrak{H}$ einen metrischen Raum $\mathfrak{R}$ durch die Einführung eines neuen Skalarproduktes zu gewinnen und dieses neue Skalarprodukt so zu erklären, dass A ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{R}$ wird. Das wollen wir nun genauer durchführen.

Da H und HA symmetrisch sind, gilt

(14) $\quad (As,Hs') = (HAs,s') = (s,HAs')$

für irgend zwei Elemente s, s' aus $\mathfrak{H}$. Setzen wir

(15) $\quad (s, Hs') = [s,s']$,

so können wir (14) in der Form

(16) $\quad [As,s'] = [s,As']$

schreiben. Vorbehaltlich einer präziseren Formulierung besagt (16), dass A bezüglich des "Skalarproduktes" [s,s'] "symmetrisch" ist. Die in Anführungszeichen gesetzten Ausdrücke müssen wir nun erläutern.

Man sieht leicht, dass [s,s'] alle Eigenschaften eines Skalarproduktes ausser der Definitheit hat. Wegen $H \geq 0$ ist zwar $[s,s] = (s,Hs) \geq 0$ für alle s, aber aus $[s,s] = 0$ kann nicht auf $s = 0$ geschlossen werden. [s,s'] ist also nur positiv semidefinit, und deshalb wollen wir, wie üblich, [s,s']

als ein positiv semidefinites Skalarprodukt bezeichnen. Setzen wir [9]

$$(17) \qquad \sqrt{[s,s]} = |s| ,$$

so sieht man leicht, dass die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$(18) \qquad |[s,s']| \leq |s| \cdot |s'|$$

gilt und dass die Grösse $|s|$ alle Eigenschaften einer Norm ausser der Definitheit hat (d.h. es ist zwar $|s| \geq 0$, aber aus $|s| = 0$ folgt nicht $s = 0$). Definiert man den Abstand zweier Elemente s,s' durch

$$(19) \qquad |s - s'|,$$

so wird hierdurch in $\mathfrak{H}$ eine semidefinite Metrik eingeführt; wie dieser Ausdruck zu verstehen ist, wird nach dem Vorausgegangenen deutlich sein.

Unter $\mathfrak{R}$ wollen wir nun im folgenden immer den Raum verstehen, der aus dem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ dadurch entsteht, dass wir das lineare System von $\mathfrak{H}$ beibehalten und in dieses lineare System das semidefinite Skalarprodukt (15) mit $H \geq 0$ einführen. $\mathfrak{R}$ ist im allgemeinen kein Hilbert-Raum, nicht einmal ein metrischer Raum im strengen Sinne, weil durch (19) im allgemeinen nur eine semidefinite Metrik erklärt wird, doch werden die vorhandenen metrischen Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ für unsere Zwecke ausreichen.

Einen (nicht notwendig beschränkten) Operator A auf $\mathfrak{R}$ nennen wir symmetrisch, wenn

$$(20) \qquad [As,s'] = [s,As']$$

für alle $s,s' \in \mathfrak{R}$ ist. Man sieht leicht, dass ein Operator A

[9] Die Ausführungen dieses Absatzes sind auch dann gültig, wenn [s,s'] ein beliebiges, nicht notwendig durch (15) definiertes positiv semidefinites Skalarprodukt ist.

auf $\mathfrak{T}$ genau dann durch H symmetrisierbar ist, wenn er als Operator auf $\mathfrak{R}$ symmetrisch ist. Die Untersuchung symmetrisierbarer Operatoren auf $\mathfrak{T}$ läuft daher auf die Untersuchung symmetrischer Operatoren auf $\mathfrak{R}$ hinaus. Im Falle finiter Operatoren auf $\mathfrak{T}$ liegen dabei, wie erwähnt, die Verhältnisse besonders einfach, weil die Finitheit durch den Uebergang von $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{R}$ nicht beeinflusst wird.

Da wir die Existenz von Eigenwerten des symmetrischen finiten Operators A auf $\mathfrak{R}$ beweisen können, ohne zu benutzen, dass das positiv semidefinite Skalarprodukt [s,s'] vermittels eines symmetrischen Operators H gemäss (15) definiert ist, sprechen wir diesen Existenzsatz, den Satz 5, gleich für Operatoren aus, die auf einem beliebigen linearen System $\mathfrak{L}$ mit einem beliebigen positiv semidefiniten Skalarprodukt [s,s'] [10] definiert und auf $\mathfrak{L}$ symmetrisch [11] und finit sind (die genauen Voraussetzungen sind in Satz 5 angegeben). Vorher benötigen wir noch einige Bemerkungen über symmetrische Operatoren auf $\mathfrak{L}$. Diese Bemerkungen werden ebenso bewiesen, wie die entsprechenden Sätze über symmetrische Operatoren auf einem Hilbert-Raum.

Ist A ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{L}$, so nimmt die "quadratische Form" [Af,f] nur reelle Werte an, ist keine Eigenlösung zu einem Eigenwert $\zeta \neq 0$ von A zu sich selbst orthogonal, so sind alle Eigenwerte reell und Eigenlösungen zu verschiedenen Eigenwerten zueinander orthogonal. Ist

(21) $|[Af,f]| \leq K \cdot |f|^2$ für alle $f \in \mathfrak{L}$,

so ist A beschränkt, und die kleinste Konstante K, die man in (21)

[10] Beachte Fussnote 9) !

[11] D.h. die auf $\mathfrak{L}$ die Gleichung (20) erfüllen.

wählen kann, ist die Norm $|A|$ von A [12]. Daraus folgt

$$|A| = \overline{\underset{|f|=1}{\text{fin}}}\,|[Af,f]|\,, \tag{22}$$

falls es in $\mathfrak{X}$ überhaupt Elemente g mit $|g| \neq 0$ gibt. Andernfalls ist aber $|A| = 0$, und es gilt dann trivialerweise $|A| = \overline{\underset{f\in\mathfrak{X}}{\text{fin}}}\,|[Af,f]|$. Insbesondere ist also $|A| = 0$, wenn $[Af,f] = 0$ ist für alle $f \in \mathfrak{X}$.

Den nun folgenden Existenzbeweis für Eigenwerte führen wir mit Hilfe eines Extremalverfahrens, das dem bekannten Extremalverfahren in der Eigenwerttheorie der symmetrischen vollstetigen Operatoren völlig analog ist.[13]

Satz 5: Ist A ein beschränkter, symmetrischer und finiter Operator auf dem linearen System $\mathfrak{X}$ mit positiv semidefinitem Skalarprodukt, ist $|A| \neq 0$ und ist für jede reelle Zahl $\mu \neq 0$, die kein Eigenwert von A ist, $(A - \mu I)^{-1}$ beschränkt [14], so gibt es einen von Null verschiedenen reellen Eigenwert von A, der seinem Betrage nach mit $|A|$ übereinstimmt.

Beweis: Wegen $|A| \neq 0$ ist die Menge der $f \in \mathfrak{X}$ mit $|f| = 1$ nicht leer und daher wird $|A|$ durch (22) gegeben. Wir wählen eine Folge von Elementen $f_n \in \mathfrak{X}$ mit

$$|f_n| = 1 \quad \text{und} \quad |[Af_n,f_n]| \to |A|$$

aus und zwar gleich so, dass auch die Folge der $[Af_n,f_n]$ konvergiert, etwa gegen ξ . Es ist also $|\xi| = |A|$. Die Relation

$$0 \leq |Af_n - \xi f_n| = |Af_n|^2 - 2\xi[Af_n,f_n] + \xi^2|f_n|^2$$

lässt erkennen, dass sich nach Wahl eines beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ so bestimmen lässt, dass

$$|(A - \xi I)f_n| < \varepsilon \text{ für } n > n_0(\varepsilon) \tag{23}$$

---

12) Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 228. Der dort für einen Hilbert-Raum gegebene Beweis lässt sich auf unseren Fall übertragen.

13) Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 229.

14) Ist $\mu \neq 0$ kein Eigenwert, so ist wegen der Finitheit von A $0 = \nu(A - \mu I) = \beta(A - \mu I)$, also existiert $(A - \mu I)^{-1}$ und ist auf ganz $\mathfrak{X}$ definiert.

ist. ξ ist reell und von Null verschieden. Wäre ξ kein Eigenwert, so wäre also nach der Voraussetzung $(A - \xi I)^{-1}$ beschränkt, woraus wegen (23) folgt, dass

$|f_n| = |(A - \xi I)^{-1}(A - \xi I)f_n| \leq |(A - \xi I)^{-1}| \cdot \varepsilon$ für $n > n_0(\varepsilon)$

ist. Also würde $|f_n| \to 0$ streben, im Widerspruch zu $|f_n| = 1$.

Dieser Satz ist der Kern des Existenzsatzes für Eigenwerte und des Entwicklungssatzes im Falle symmetrisierbarer finiter Operatoren, zu dem wir nun übergehen. Wir benötigen dazu den folgenden

Hilfssatz 1: Ist der Operator A auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ beschränkt und durch $H \geq 0$ symmetrisierbar, so ist A auch auf $\mathfrak{R}$ beschränkt.[15)]

Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes gilt nämlich die Ungleichung

(24) $|(s,HAs)| \leq |A| \cdot (s,Hs)$ für alle $s \in \mathfrak{H}$ [16)].

Diese Ungleichung lässt sich auch so formulieren: Es ist

(25) $|[s,As]| \leq |A| \cdot |s|^2$ für alle $s \in \mathfrak{R}$

Da A in $\mathfrak{R}$ symmetrisch ist, folgt aus (25), dass A einer Abschätzung (21) genügt (wobei $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}$ ist). Daher und wegen der Symmetrie von A auf $\mathfrak{R}$ ist A auf $\mathfrak{R}$ beschränkt.

Aus Satz 5 und Hilfssatz 1 ergibt sich der folgende

Satz 6: Ist A ein beschränkter finiter Operator auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$, ist A durch $H \geq 0$ symmetrisierbar und ist $HA \neq 0$, so besitzt A einen von Null verschiedenen reellen Eigenwert, der seinem Betrage nach mit $\overline{\text{fin}}_{(s,Hs)=1} |(HAs,s)|$ übereinstimmt.

15) Der Raum $\mathfrak{R}$ ist auf Seite 66 definiert.
16) Vgl. Reid [12].

Beweis: Wir zeigen, dass die Voraussetzungen des Satzes 5 (für $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}$) erfüllt sind. A ist trivialerweise auf $\mathfrak{R}$ symmetrisch und finit, und nach Hilfssatz 1 ist A auf $\mathfrak{R}$ auch beschränkt. Nach (22) ist

$$(26) \qquad |A| = \overline{\underset{\{s,s\}=1}{\text{fin}}} \, |[As,s]| = \overline{\underset{(s,Hs)=1}{\text{fin}}} \, |(HAs,s)| .$$

Da HA symmetrisch und $\neq 0$ ist, folgt aus (26), dass $|A| \neq 0$ ist. Nun sei $\mu \neq 0$ eine reelle Zahl, die kein Eigenwert von A ist. Dann existiert $R_\mu = (A - \mu I)^{-1}$ und ist auf ganz $\mathfrak{R}$ definiert (vgl. Fussnote 14). Zu einem beliebigen Element s aus $\mathfrak{R}$ gibt es also genau ein $u \in \mathfrak{R}$ mit

$$s = (A - \mu I)u \text{ , d.h. } u = R_\mu s.$$

Ist r ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, so ist, weil wegen der Realität von μ mit A auch $A - \mu I$ in $\mathfrak{R}$ symmetrisch ist,

$$[R_\mu r,s] = [R_\mu r,(A - \mu I)u] = [(A - \mu I)R_\mu r,u] = [r,u] = [r,R_\mu s],$$

also ist R_μ in $\mathfrak{R}$ symmetrisch, d.h. in $\mathfrak{Y}$ durch H symmetrisierbar. Daher und weil nach §3, Hilfssatz 1 R_μ in $\mathfrak{Y}$ beschränkt ist, ist nach Hilfssatz 1 R_μ in $\mathfrak{R}$ beschränkt.

Damit ist gezeigt, dass im vorliegenden Falle alle Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt sind. Daher folgt die Behauptung des Satzes 6 aus Satz 5, wobei man für die Bemerkung über den Betrag des Eigenwertes noch (26) zu beachten hat.

Anmerkung: Für Operatoren A, die eine vollstetige n-te Iterierte A^n besitzen, wurde Satz 6 ebenfalls mittels des Extremalverfahrens von Reid [12] bewiesen. Die Vollstetigkeit von A^n ermöglicht es dabei, auf die Vollständigkeit des zugrundeliegenden Raumes zu verzichten. Wir haben die Vollständigkeit hier benötigt, um die Beschränktheit von R_μ zu erzwingen.

Unser nächstes Ziel ist, einen Entwicklungssatz für sym-

metrisierbare finite Operatoren herzuleiten. Dieses Ziel werden wir nur für eine spezielle Klasse symmetrisierbarer, nämlich für die Klasse der vollsymmetrisierbaren Operatoren erreichen. Ein beschränkter, durch den symmetrischen Operator H symmetrisierbarer Operator A auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{T}$ heisst vollsymmetrisierbar, wenn $He \neq 0$ ist für jede Eigenlösung e von A zu einem Eigenwert $\xi \neq 0$.

Hilfssatz 2: Es sei $H \geq 0$. Genau dann ist der durch H symmetrisierbare Operator A auf $\mathfrak{T}$ sogar vollsymmetrisierbar, wenn keine Eigenlösung von A zu einem von Null verschiedenen Eigenwert zu sich selbst H-orthogonal ist. Ist A durch H vollsymmetrisierbar, so sind alle Eigenwerte von A reell; ist überdies A finit, so ist A sogar vollfinit.

Beweis: Aus (24) folgt, wenn man A = H setzt, die Ungleichung

(27) $\quad \|Hs\|^2 \leq \|H\| \cdot (s,Hs)$ für $H \geq 0$ und alle $s \in \mathfrak{T}$.[17]

Ist A durch H vollsymmetrisierbar und e eine Eigenlösung von A zu einem Eigenwert $\xi \neq 0$, so ist $(e,He) \neq 0$, weil andernfalls nach (27) $He = 0$ wäre, im Widerspruch zur vollen Symmetrisierbarkeit von A. Ist A nicht vollsymmetrisierbar, so gibt es eine Eigenlösung e von A zu einem Eigenwert $\xi \neq 0$, so dass $He = 0$ ist. Dann ist trivialerweise $(e,He) = 0$, d.h. e zu sich selbst H-orthogonal.

Die Behauptung über die Realität der Eigenwerte ergibt sich aus dem ersten Teil dieses Hilfssatzes zusammen mit der Bemerkung 2.) auf Seite 61 . Die Behauptung über die Vollfinitheit von A folgt aus Fussnote 6).

17) Diese Ungleichung wurde von Reid [12] angegeben.

Um den gewünschten Entwicklungssatz beweisen zu können, benötigen wir noch drei weitere Hilfssätze.

Hilfssatz 3: Ist A ein Operator auf $\mathfrak{R}$ [18], so ist $[As,s] \neq 0$ für mindestens ein $s \in \mathfrak{R}$, wenn es einen Eigenwert $\xi \neq 0$ von A und zu diesem eine Eigenlösung e mit $[e,e] \neq 0$ gibt.

Beweis: Wegen $Ae = \xi e$ ist $[Ae,e] = \xi[e,e]$. Daher wäre $[e,e] = 0$, wenn $[Ae,e] = 0$ wäre, im Widerspruch zu der Voraussetzung $[e,e] \neq 0$.

Hilfssatz 4: Es sei $\mathfrak{U}$ ein endlichdimensionales Untersystem von $\mathfrak{R}$, und auf $\mathfrak{U}$ sei das Skalarprodukt $[r,s]$ positiv definit [19]. Ist $\mathfrak{V}$ das System aller zu $\mathfrak{U}$ orthogonalen Elemente aus $\mathfrak{R}$, so ist

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{U} + \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{U} \cap \mathfrak{V} = 0,$$

d.h. $\mathfrak{V}$ ist ein (orthogonales) Komplement zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{R}$. In der Metrik von $\mathfrak{T}$ ist $\mathfrak{V}$ abgeschlossen.

Beweis: Da auf $\mathfrak{U}$ das Skalarprodukt $[r,s]$ positiv definit ist, gibt es eine orthonormale Basis $\{e_1,..,e_n\}$ von $\mathfrak{U}$. Ist $r \in \mathfrak{R}$, so setzen wir

$$u = \sum_{\nu=1}^{n} (r,e_\nu)e_\nu \quad \text{und} \quad v = r - u.$$

Trivialerweise ist $u \in \mathfrak{U}$, und wegen

$(v,e_\nu) = (r,e_\nu) - (u,e_\nu) = (r,e_\nu) - (r,e_\nu) = 0$ für $\nu=1,\ldots,n$

ist $v \in \mathfrak{V}$. In $r = u + v$ haben wir also eine Zerlegung von r in Komponeneten nach $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$, d.h. es ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{U} + \mathfrak{V}$. Aus $w \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$ folgt $[w,w] = 0$, also $w = 0$, da auf $\mathfrak{U}$ das Skalarprodukt $[r,s]$ positiv definit ist. Es ist also $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V} = 0$.

---

18) Der Raum $\mathfrak{R}$ ist auf Seite 66 definiert.

19) D.h. es sei $[u,u] > 0$ für alle von Null verschiedenen $u \in \mathfrak{U}$.

Die Behauptung über die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{N}$ ergibt sich unmittelbar daraus, dass $\mathfrak{N}$ aus allen Elementen von $\mathfrak{T}$ besteht, die H-orthogonal zu $\mathfrak{M}$ sind.

Hilfssatz 5: [20] Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei Unterräume eines Banach-Raumes, ist $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = 0$ und $\mathfrak{M}$ von endlicher Dimension, so gibt es eine Konstante K derart, dass für jedes $u \in \mathfrak{M}$ und $v \in \mathfrak{N}$ die Ungleichung

$$\|u\| + \|v\| \leq K \|u + v\|$$

gilt.

Wir formulieren nun den Hauptsatz über vollsymmetrisierbare finite Operatoren:

Satz 7: [21] Es sei A ein beschränkter finiter Operator auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{T}$, durch $H \geq 0$ vollsymmetrisierbar, und es sei $HA \neq 0$. Dann besitzt A mindestens einen von Null verschiedenen Eigenwert. Jeder Eigenwert $\neq 0$ hat endliche Vielfachheit, die Eigenwerte sind reell und bilden, falls es unendlich viele gibt, eine Nullfolge. Man erhält sie durch ein Extremalverfahren, das im Beweis des Satzes angegeben wird. Ist $\{\lambda_\nu\}$ die Folge der von Null verschiedenen Eigenwerte von A, jeder Eigenwert so oft aufgeführt wie es seiner Vielfachheit entspricht, so gibt es dazu eine H-orthonormale Folge $\{e_\nu\}$ von Eigenlösungen, und jedes Element aus $HA\mathfrak{T}$ gestattet die Entwicklung

$$HAs = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (s, He_\nu) He_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} (HAs, e_\nu) He_\nu .$$

20) Dieser Hilfssatz wurde von F. Riesz [13] für einen speziellen Banach-Raum bewiesen, der Beweis lässt sich jedoch unmittelbar auf den allgemeinen Fall übertragen.

21) Dieser Satz ist für Operatoren A, die eine vollstetige n-te Iterierte A^n besitzen, bekannt. Vgl. Reid [12] und Zaanen [24]. Siehe auch Zaanen [23].

Beweis: Nach Satz 6 besitzt A einen Eigenwert $\mu_1 \neq 0$ mit

(28) $$|\mu_1| = \overline{\operatorname{fin}}_{(s,Hs)=1} |(HAs,s)| = \overline{\operatorname{fin}}_{|r|=1} |[Ar,r]| .$$

Es sei e_1 eine zu μ_1 gehörende Eigenlösung. Da wegen der vollen Symmetrisierbarkeit von A nach Hilfssatz 2

$$[e_1,e_1] = (e_1,He_1) \neq 0$$

ist, können wir e_1 so normieren, dass $[e_1,e_1] = 1$ ist. e_1 spannt in $\mathfrak{R}$ ein eindimensionales lineares Untersystem $\mathfrak{U}^{(1)}$ auf, und auf $\mathfrak{U}^{(1)}$ ist das Skalarprodukt [r,s] positiv definit. Daher existiert nach Hilfssatz 4 zu $\mathfrak{U}^{(1)}$ ein orthogonales Komplement $\mathfrak{V}^{(1)}$. Da A auf $\mathfrak{R}$ symmetrisch ist und $\mathfrak{U}^{(1)}$ in sich abbildet, bildet A auch $\mathfrak{V}^{(1)}$ in sich ab, wie man leicht sieht. Die Zerlegung

(29) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^{(1)} + \mathfrak{V}^{(1)}$$

ist also eine Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in invariante komplementäre Untersysteme [22].

Es sei $A^{(1)}$ die Einschränkung von A auf $\mathfrak{V}^{(1)}$. Wir wollen zeigen, dass $A^{(1)}$ auf $\mathfrak{V}^{(1)}$ die Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt, eventuell ausser der Voraussetzung $|A^{(1)}| \neq 0$. Die Symmetrie von $A^{(1)}$ ist trivial. Da nach Hilfssatz 1 A auf $\mathfrak{R}$ beschränkt ist, ist erst recht $A^{(1)}$ auf $\mathfrak{V}^{(1)}$ beschränkt. Weil A nach Hilfssatz 2 vollfinit ist und die Zerlegung (29) den Voraussetzungen von §2, Corollar 5 genügt, ist nach diesem Corollar $A^{(1)}$ vollfinit. Nun sei μ eine reelle Zahl $\neq 0$, die kein Eigenwert von $A^{(1)}$ ist, es sei also, wenn $I^{(1)}$ die Einschränkung von I auf $\mathfrak{V}^{(1)}$ bedeutet, $\nu(A^{(1)} - \mu I^{(1)}) = 0$. Dann existiert also die Inverse

$$R_\mu^{(1)} = (A^{(1)} - \mu I^{(1)})^{-1}$$

---

[22] Wenn wir nicht ausdrücklich $\mathfrak{U}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{V}^{(1)}$ als Untersysteme von $\mathfrak{T}$ betrachten, so sind unter $\mathfrak{U}^{(1)}$, $\mathfrak{V}^{(1)}$ immer Untersystem von $\mathfrak{R}$ zu verstehen, d.h. lineare Systeme mit der Metrik von $\mathfrak{R}$ Um die beiden Möglichkeiten zu unterscheiden, benutzen wir auch die kurze Schreibweise $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{V}^{(1)} \subseteq \mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{V}^{(1)} \subseteq \mathfrak{R}$.

und ist auf ganz $\mathfrak{H}^{(\omega)}$ definiert. Betrachten wir für den Augenblick $\mathfrak{H}^{(\omega)}$ als Untersystem von $\mathfrak{T}$, so ist $\mathfrak{H}^{(\omega)}$ nach Hilfssatz 4 abgeschlossen, also ein Hilbert-Raum. Wegen $\nu(A^{(\omega)}-\mu I^{(\omega)})\cdot\beta(A^{(\omega)}-\mu I^{(\omega)})=0$ gehört μ nach §3, Hilfssatz 1 also zur Resolventenmenge von $A^{(1)}$, betrachtet als Operator auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}^{(\omega)} \subseteq \mathfrak{T}$. Also ist $R_\mu^{(1)}$ auf $\mathfrak{H}^{(\omega)} \subseteq \mathfrak{T}$ beschränkt. Wir definieren nun einen Operator R auf $\mathfrak{T}$ (und damit auch auf $\mathfrak{R}$) durch die Vorschrift $Rs = R_\mu^{(1)}v$, wenn $s = u + v$ mit $u \in \mathfrak{U}^{(\omega)}$, $v \in \mathfrak{H}^{(\omega)}$ ist. Da, wie man leicht sieht, $R_\mu^{(1)}$ auf $\mathfrak{H}^{(\omega)} \subseteq \mathfrak{R}$ symmetrisch ist [23], ist R auf $\mathfrak{R}$ symmetrisch, d.h. auf $\mathfrak{T}$ durch H symmetrisierbar. Weil $\mathfrak{U}^{(\omega)}$ von endlicher Dimension (und daher in $\mathfrak{T}$ abgeschlossen, also ein Unterraum von $\mathfrak{T}$) ist und ebenso $\mathfrak{H}^{(\omega)}$, wie wir eben schon mittels Hilfssatz 4 gesehen haben, ein Unterraum von $\mathfrak{T}$ ist und $\mathfrak{U}^{(\omega)}$, $\mathfrak{H}^{(\omega)}$ nur das Nullelement gemeinsam haben, folgt mit $s = u + v$ ($u \in \mathfrak{U}^{(\omega)}$, $v \in \mathfrak{H}^{(\omega)}$) nach Hilfssatz 5

$$\begin{aligned}\|Rs\| = \|R_\mu^{(1)}v\| &\leq \|R_\mu^{(1)}\|\cdot\|v\| \leq \|R_\mu^{(1)}\|\cdot(\|u\| + \|v\|)\\ &\leq \|R_\mu^{(1)}\|\cdot K(\|u+v\|) = \|R_\mu^{(1)}\|\cdot K\cdot\|s\| ,\end{aligned}$$

also ist R ein beschränkter Operator auf $\mathfrak{T}$. Daraus und aus der oben festgestellten Symmetrisierbarkeit von R folgt nach Hilfssatz 1, dass R auch als Operator auf $\mathfrak{R}$ beschränkt ist, also ist auch $R_\mu^{(1)}$, die Einschränkung von R auf $\mathfrak{H}^{(\omega)}$, beschränkt.

Damit haben wir gezeigt, dass $A^{(1)}$ als Operator auf $\mathfrak{H}^{(\omega)} \subseteq \mathfrak{R}$ bis auf die Voraussetzung $|A^{(1)}| \neq 0$ alle Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt. Ist $|A^{(1)}| \neq 0$, so folgt daher aus Satz 5, dass $A^{(1)}$ einen Eigenwert $\mu_1 \neq 0$ mit

$$(28') \qquad |\mu_1| = |A^{(1)}| = \overline{\operatorname{fin}}_{v\in\mathfrak{H}^{(\omega)},\,|v|=1} |[A^{(1)}v, v]|$$

besitzt. Die zugehörige Eigenlösung e_2 ist in $\mathfrak{R}$ orthogonal zu e_1 und kann normiert werden (vgl. S. 74). (28') können wir in der Form

[23] Vgl. die entsprechende Stelle im Beweis zu Satz 6.

(30) $\quad |\mu_1| = \overline{\text{fin}}\,|[Ar,r]|$

schreiben, wobei r alle Elemente von $\mathfrak{R}$ mit $|r| = 1$ und $[r,e_1] = 0$ durchläuft. Aus (28) und (30) folgt, dass $|\mu_1| \leq |\mu_1|$ ist. Ist aber $|A^{(1)}| = 0$, also $[A^{(1)}v,v] = 0$ für alle $v \in \mathfrak{v}^{(1)}$ so besitzt $A^{(1)}$ keinen von Null verschiedenen Eigenwert ξ. Wäre nämlich $\xi \neq 0$ ein Eigenwert von $A^{(1)}$ und e eine zugehörige Eigenlösung, so wäre e auch Eigenlösung von A zum Eigenwert ξ; wegen der vollen Symmetrisierbarkeit von A wäre daher nach Hilfssatz 2 $[e,e] \neq 0$ und daher nach Hilfssatz 3, auf $A^{(1)}$ angewandt, $[A^{(1)}v,v] \neq 0$ für mindestens ein $v \in \mathfrak{v}^{(1)}$, im Widerspruch zu der obigen Annahme.

Daraus, dass $A^{(1)}$ keinen von Null verschiedenen Eigenwert besitzt, folgt, dass A selbst ausser μ_1 keinen von Null verschiedenen Eigenwert besitzt. Ist nämlich $\xi \neq \mu_1$ ein Eigenwert von A und e eine zugehörige Eigenlösung, so ist wegen der Symmetrie von A auf $\mathfrak{R}$ und weil keine Eigenlösung von A zu einem Eigenwert $\neq 0$ in $\mathfrak{R}$ zu sich selbst orthogonal ist (vgl. Hilfssatz 2), e nach den Bemerkungen über symmetrische Operatoren auf Seite 67 zu e_1, der zu μ_1 gehörenden Eigenlösung von A, orthogonal, e liegt also in $\mathfrak{v}^{(1)}$ und daher ist $A^{(1)}e = Ae = \xi e$, d.h. ξ ist auch Eigenwert von $A^{(1)}$. Nach der Voraussetzung ist also in der Tat $\xi = 0$.

Insgesamt haben wir also gefunden, dass A ausser μ_1 keinen Eigenwert $\neq 0$ besitzt, wenn $|A^{(1)}| = 0$ ist. In diesem Falle ist unser Konstruktionsverfahren bereits zu Ende: wir haben alle Eigenwerte $\neq 0$ von A gefunden.

Haben wir allgemein durch unser Verfahren die in $\mathfrak{R}$ orthonormalen Eigenlösungen $e_1,\ldots,e_n$ zu den Eigenwerten $\mu_1,\ldots,\mu_n$ mit

$\mu_\nu \neq 0$ und $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots \geq |\mu_n|$

erhalten, so betrachten wir das von $e_1, \ldots, e_n$ aufgespannte Untersystem $\mathfrak{U}^{(n)}$ von $\mathfrak{R}$ und die Menge $\mathfrak{V}^{(n)}$ aller zu $\mathfrak{U}^{(n)}$ orthogonalen Elemente von $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{U}^{(n)}$ ist endlichdimensional, und auf $\mathfrak{U}^{(n)}$ ist das Skalarprodukt $[r,s]$ positiv definit, da

$$[\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu e_\nu, \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu e_\nu] = \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^2$$

ist. Nach Hilfssatz 4 ist daher $\mathfrak{V}^{(n)}$ ein orthogonales Komplement zu $\mathfrak{U}^{(n)}$ in $\mathfrak{R}$, und man sieht leicht, dass $\mathfrak{U}^{(n)}$ und $\mathfrak{V}^{(n)}$ unter A invariant sind. Es sei $A^{(n)}$ die Einschränkung von A auf $\mathfrak{V}^{(n)}$. Wir können auf $\mathfrak{U}^{(n)}$, $\mathfrak{V}^{(n)}$, $A^{(n)}$ wörtlich dieselben Schlüsse anwenden wie auf $\mathfrak{U}^{(1)}$, $\mathfrak{V}^{(1)}$, $A^{(1)}$ und finden so, dass entweder nur $\mu_1, \ldots, \mu_n$ nichtverschwindenede Eigenwerte von A sind oder dass A einen weiteren Eigenwert $\mu_{n+1} \neq 0$ mit $|\mu_{n+1}| \leq |\mu_n|$ besitzt; in diesem Falle ist

$$|\mu_{n+1}| = \overline{\text{fin}}\, |[Ar,r]|,$$

wobei r unter den Bedingungen

$$|r| = 1 \quad \text{und} \quad [r,e_\nu] = 0 \text{ für } \nu = 1,\ldots,n$$

in $\mathfrak{R}$ variiert. In dieser Weise fortschreitend erhalten wir eine (eventuell abbrechende) Folge $\mu_1, \mu_2, \cdots$ von nichtverschwindenden Eigenwerten mit $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots$; μ_n tritt in dieser Folge so oft auf, wie es seiner (endlichen) Vielfachheit entspricht. Die zugehörigen Eigenlösungen e_n sind orthonormal.

Bricht die Folge der μ_n nicht ab, so konvergiert sie nach Satz 1 (unter Beachtung von Hilfssatz 2) gegen Null. Mit einem beliebigen $r \in \mathfrak{R}$ setzen wir dann

$$s_n = r - \sum_{\nu=1}^{n} [r,e_\nu] e_\nu .$$

Da s_n, wie man leicht sieht, in $\mathfrak{V}^{(n)}$ liegt, ist

$$|As_n| \leq |\mu_{n+1}| \cdot |s_n| . \tag{31}$$

Wegen der Gleichung

$$|s_n|^2 = |r|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} |[r,e_\nu]|^2 \leq |r|^2$$

folgt aus (31) die Abschätzung

$$|As_n| \leq |\mu_{n+1}| \cdot |r| ,$$

und daraus folgt wegen $\mu_n \to 0$, dass $|As_n|$ gegen Null konvergiert, d.h. dass

(32) $$|Ar - \sum_{\nu=1}^{n} [r,e_\nu] Ae_\nu| = |Ar - \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu [r,e_\nu] e_\nu| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Enthielte die Folge der μ_ν nicht alle von Null verschiedenen Eigenwerte des Operators A, so gäbe es eine Eigenlösung e zu einem Eigenwert $\mu \neq 0$, so dass $[e,e_\nu] = 0$ für alle e_ν wäre. Setzen wir in (32) $r = e$, so erhalten wir $|Ae| = 0$, wegen $Ae = \mu e$ und $\mu \neq 0$ also $|e| = 0$, im Widerspruch dazu, dass nach Hilfssatz 2 für jede Eigenlösung zu einem von Null verschiedenen Eigenwert $[e,e] \neq 0$ ist. Die oben konstruierte Folge der μ_ν enthält also alle Eigenwerte $\neq 0$ von A.

Damit sind die Behauptungen des Satzes über Existenz und Konvergenzverhalten der von Null verschiedenen Eigenwerte bewiesen, und das angekündigte Konstruktionsverfahren ist beschrieben. Die Realität der Eigenwerte ist bereits durch Hilfssatz 2 sichergestellt, die Behauptung über die endliche Vielfachheit ist trivial (in der Tat haben wir die endliche Vielfachheit der Eigenwerte bereits bei der Konstruktion der Folge $\{\mu_\nu\}$ erwähnt und benützt).

Bricht die Folge der μ_ν etwa mit μ_n ab, so ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^{(n)} + \mathfrak{V}^{(n)}$, und auf $\mathfrak{V}^{(n)}$ ist $[Av,v] = [A^{(n)}v,v] = 0$, somit auch $|Av| = 0$. Ist r ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, so gilt mit geeigneten Elementen $u \in \mathfrak{U}^{(n)}$, $v \in \mathfrak{V}^{(n)}$ die Gleichung

$$r = u + v = \sum_1^{\infty}[u,e_\nu]e_\nu + v = \sum_1^{\infty}[r,e_\nu]e_\nu + v;$$

daher ist

$$|Ar - \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu[r,e_\nu]e_\nu| = |Av| = 0,$$

so dass bei geeigneter Interpretation die Beziehung (32) in beiden Fällen - abbrechende bzw. nichtabbrechende Folge von nichtverschwindenden Eigenwerten - gültig ist.

Wir wollen diese in $\mathfrak{R}$ gefundenen Ergebnisse in $\mathfrak{T}$ deuten.

Die Folge $\{e_\nu\}$ der Eigenlösungen ist in $\mathfrak{R}$ orthonormal. Daher ist $\{e_\nu\}$ in $\mathfrak{T}$ eine H-orthonormale Folge. Da auch in $\mathfrak{R}$ die Schwarzsche Ungleichung gilt, folgt aus (32), für ein beliebiges $s \in \mathfrak{R}$ sofort

$$[Ar,s] = \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu[r,e_\nu][e_\nu,s]$$

und daraus

$$(33) \qquad (HAr,s) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu(r,He_\nu)(He_\nu,s).$$

Für $r = s$ ergibt sich aus (33) ein verallgemeinertes Hauptachsentheorem:

$$(34) \qquad (HAs,s) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu|(s,He_\nu)|^2 .$$

Diese Ergebnisse gelten sinngemäss auch im Falle, dass die Folge der μ_ν abbricht. Die unendlichen Reihen reduzieren sich dann auf endliche Summen.

Ist die Folge der Konstanten γ_ν so beschaffen, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\gamma_\nu|^2$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_1^{\infty}\gamma_\nu He_\nu$ und definiert wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{T}$ ein Element von $\mathfrak{T}$ [24]. Denn nach der Ungleichung (27) ist

$$\|\sum_1^{\infty}\gamma_\nu He_\nu\|^2 = \|H\sum_1^{\infty}\gamma_\nu e_\nu\|^2 \le \|H\|(\sum_1^{\infty}\gamma_\nu e_\nu, \sum_1^{\infty}\gamma_\nu He_\nu) = \|H\|\cdot\sum_1^{\infty}|\gamma_\nu|^2,$$

woraus alles folgt. Da in $\mathfrak{R}$ die Besselsche Ungleichung gilt, konvergiert für beliebiges $r \in \mathfrak{R}$ die Reihe

---

[24] Reid [12].

(35) $$\sum_1^\infty |[r,e_\nu]|^2 = \sum_1^\infty |(r,He_\nu)|^2,$$

wegen $\mu_\nu \to 0$ konvergiert also auch die Reihe $\sum_1^\infty |\mu_\nu|^2 |(r,He_\nu)|^2$. Daher konvergiert nach der eingangs gemachten Bemerkung die Reihe

$$\sum_1^\infty \mu_\nu (r,He_\nu)He_\nu = F(r).$$

Aus (33) ergibt sich dann, dass

$$(F(r),s) = (HAr,s) \text{ für beliebiges } s \in \mathfrak{H},$$

und daher ist

$$HAr = \sum_1^\infty \mu_\nu (r,He_\nu)He_\nu,$$

oder etwas anders geschrieben:

$$HAr = \sum_1^\infty (HAr,e_\nu)He_\nu.$$

Damit ist auch die im Satz behauptete Entwicklung bewiesen.

Es erhebt sich die Frage, wann man jedes $s \in \mathfrak{H}$ in der Form

$$s = \sum_1^\infty (s,He_\nu)e_\nu$$

darstellen kann. Wir werden darüber den folgenden Satz beweisen, wobei wir durch die Schreibweise $H \geq mI$ zum Ausdruck bringen, dass H symmetrisch ist und für alle $s \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung $(Hs,s) \geq m(s,s)$ gilt.

Satz 8: Der finite beschränkte Operator A auf dem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ sei durch $H \geq mI$ mit $m > 0$ symmetrisierbar. Genau dann gestattet jedes $s \in \mathfrak{H}$ die Entwicklung

(36) $$s = \sum_1^\infty (s,He_\nu)e_\nu,$$

wenn Null kein Eigenwert von A ist; e_ν hat dabei dieselbe Bedeutung wie in Satz 7.

Beweis: Wegen $H \geq mI$ mit $m > 0$ ist $\mathfrak{N}(H) = 0$. Daher ist trivialerweise A durch H sogar vollsymmetrisierbar. Nach Satz 7 gibt es also zu den Eigenwerten $\neq 0$ von A eine H-orthonormale Folge $\{e_\nu\}$ von Eigenlösungen. Damit gilt

$\|\sum_{\nu}^{\prime} \gamma_\nu e_\nu\|^2 = (\sum_{\nu}^{\prime} \gamma_\nu e_\nu, \sum_{\nu}^{\prime} \gamma_\nu e_\nu) \leq \frac{1}{m}(\sum_{\nu}^{\prime} \gamma_\nu He_\nu, \sum_{\nu}^{\prime} \gamma_\nu e_\nu) = \frac{1}{m} \sum_{\nu}^{\prime} |\gamma_\nu|^2$.

Mit $\sum_{\nu}^{\infty} |\gamma_\nu|^2$ konvergiert also auch $\sum_{\nu}^{\infty} \gamma_\nu e_\nu$. Insbesondere konvergiert also $\sum_{\nu}^{\infty}(s,He_\nu)e_\nu$ für jedes $s \in \mathfrak{T}$ gegen ein Element r aus $\mathfrak{T}$. Dann ist

$$HAr = \sum_{\nu}^{\infty}(s,He_\nu)HAe_\nu = \sum_{\nu}^{\infty} \mu_\nu(s,He_\nu)He_\nu ,$$

nach Satz 7 ist also $HAr = HAs$, d.h. $HA(r-s) = 0$. Wegen $\mathfrak{K}(H)=0$ folgt daraus $A(r-s) = 0$. Setzt man $s - r = k$, so ist also $k \in \mathfrak{K}(A)$ und

$$s = k + r = k + \sum_{\nu}^{\infty}(s,He_\nu)e_\nu \quad . \tag{37}$$

Ist 0 kein Eigenwert von A, ist also $\mathfrak{K}(A) = 0$, so folgt aus (37), dass für jedes $s \in \mathfrak{T}$ die Entwicklung (36) gilt. Nun gelte umgekehrt (36) für jedes $s \in \mathfrak{T}$. Für $s = k \in \mathfrak{K}(A)$ erhält man aus (36) die Entwicklung

$$k = \sum_{\nu}^{\infty}(k,He_\nu)e_\nu \quad . \tag{38}$$

Da alle Eigenwerte von A reell sind, ist nach der Bemerkung 1.) auf Seite 61 $(k,He_\nu) = 0$ für alle $\nu = 1,2,\ldots$, Nach (38) ist daher $k = 0$, d.h. $\mathfrak{K}(A) = 0$.

Damit ist der Satz 8 bewiesen.

§5. Symmetrische finite Operatoren.

In diesem Paragraphen sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum, der nicht vollständig zu sein braucht, und A ein symmetrischer und finiter Operator auf $\mathfrak{H}$. A wird im allgemeinen nicht beschränkt sein. $\bar{\mathfrak{H}}$ sei ein vollständiger Hilbert-Raum, in dem $\mathfrak{H}$ dicht liegt.[1] Wir denken uns also $\mathfrak{H}$ in seine Abschliessung $\bar{\mathfrak{H}}$ eingebettet. Den Raum $\bar{\mathfrak{H}}$ ziehen wir deshalb heran, weil wir die Theorie der symmetrischen finiten Operatoren auf $\mathfrak{H}$ auf die Betrachtung ihrer Erweiterungen[2] in $\bar{\mathfrak{H}}$ stützen werden, um uns der Hilfsmittel der Spektraltheorie selbstadjungierter Transformationen zu vergewissern. Wir verfahren damit methodisch anders als Wielandt [19], [20], der solche Operatoren zuerst untersuchte, gewinnen aber auf unserem Wege seine Ergebnisse (Existenzsatz für Eigenwerte, Entwicklungssatz) wieder und erhalten durch weitere Resultate einen tieferen Einblick in die Struktur der symmetrischen finiten Operatoren.

Wir erinnern vorweg noch einmal daran, dass der Begriff der Finitheit nur für Operatoren, d.h. für lineare Transformationen, die ihren Definitionsbereich in sich abbilden, definiert wurde. Wenn wir im folgenden von finiten Transformationen, finiten Erweiterungen usw. reden, ist daher stillschweigend darin einbegriffen, dass diese Transformationen usw. ihren Definitionsbereich in sich abbilden.

Wir formulieren zuerst einige einfache Hilfssätze, die wir im folgenden öfters gebrauchen werden.

---

1) Eine solche Abschliessung $\bar{\mathfrak{H}}$ des Raumes $\mathfrak{H}$ existiert nach Zaanen [24], S. 110, Theorem 5.

2) Die Definition dieses Begriffes ist auf S. 9 gegeben.

Hilfssatz 1: Ein symmetrischer finiter Operator A auf $\mathfrak{H}$ ist vollfinit, und für jedes $\zeta \neq 0$ gilt die Zerlegung

(0) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}(A-\zeta I) + \mathfrak{K}(A-\zeta I).$$

Der Bildbereich $\mathfrak{L}(A - \zeta I)$ von $A - \zeta I$ ist das orthogonale Komplement zu $\mathfrak{K}(A - \zeta I)$ in $\mathfrak{H}$ (insbesondere ist daher $\mathfrak{L}(A - \zeta I)$ in $\mathfrak{H}$ abgeschlossen).

Der Beweis dieses Hilfssatzes verläuft im wesentlichen genau so, wie der Beweis der entsprechenden Aussage über normale finite Operatoren (vgl. S. 57). Man braucht nur zu beachten, dass wegen der Symmetrie von A der Bildbereich $\mathfrak{L}(A - \zeta I)$ orthogonal zu $\mathfrak{K}(A - \zeta I)$ ist.

Hilfssatz 2: Ist A ein symmetrischer und finiter Operator auf $\mathfrak{H}$, so existiert $R_\zeta = (A - \zeta I)^{-1}$ für jedes ζ mit $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$ und ist auf ganz $\mathfrak{H}$ definiert und beschränkt.

Beweis: Wegen der Symmetrie von A sind alle Eigenwerte von A reell. Ist $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$, so ist daher $\nu(A - \zeta I) = 0$, und daraus folgt wegen der Finitheit von A, dass auch $\beta(A - \zeta I) = 0$ ist. Diese beiden Defektgleichungen besagen zusammen, dass $R_\zeta = (A - \zeta I)^{-1}$ auf ganz $\mathfrak{H}$ existiert. Die Beschränktheit von R_ζ folgt aus Stone [16], Theorem 4.14.

Hilfssatz 3: Ist A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{H}$ ein vollständiger und unter A invarianter Hilbert-Raum, so ist A auf $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^\perp$, dem orthogonalen Komplement zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{H}$, ein symmetrischer finiter Operator.

Beweis: Da $\mathfrak{U}$ ein vollständiger Hilbert-Raum ist, bildet nach Zaanen [24], S. 116, Theorem 3 die Menge der zu $\mathfrak{U}$ orthogonalen Elemente von $\mathfrak{T}$ ein (orthogonales) Komplement $\mathfrak{U}^{\perp}$ zu $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{T}$. Da $\mathfrak{U}$ unter A invariant und A symmetrisch ist, ist auch $\mathfrak{U}^{\perp}$ unter A invariant. $\mathfrak{T}$ zerfällt also in die beiden komplementären invarianten Untersysteme $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^{\perp}$. Da A nach Hilfssatz 1 vollfinit ist, folgt aus §2, Corollar 5, dass die Einschränkung von A auf $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^{\perp}$ finit ist. Die Symmetrie dieser Einschränkungen ist klar.

Hilfssatz 4: A sei ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{T}$. Ist A auf $\mathfrak{T}$ finit und ist $\mathfrak{Z}$ ein lineares System zwischen $A\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ (also $A\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{T}$), so ist A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{Z}$. Ist umgekehrt A auf einem solchen Zwischensystem $\mathfrak{Z}$ finit, so ist A auch auf $\mathfrak{T}$ finit.

Beweis: Jedes System $\mathfrak{Z}$ zwischen $A\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ ist trivialerweise unter A invariant, d.h. A ist ein Operator A' auf $\mathfrak{Z}$, und man prüft leicht nach, dass

$$\mathfrak{K}(A - \zeta I) = \mathfrak{K}(A' - \zeta I') \subseteq A\mathfrak{T} \qquad \text{für } \zeta \neq 0$$

ist. Es sei nun A finit auf $\mathfrak{T}$ und $\zeta \neq 0$. Nach Hilfssatz 1 und der letzten Formel kann jedes $z \in \mathfrak{Z}$ eindeutig in der Form

(1) $$z = (A - \zeta I)s + k \quad \text{mit } s \in \mathfrak{T},\ k \in \mathfrak{K}(A' - \zeta I')$$

dargestellt werden. Es ist also

$$\zeta s = As + k - z,$$

und wegen $\zeta \neq 0$, $As \in \mathfrak{Z}$ und $k \in \mathfrak{Z}$ folgt daraus $s \in \mathfrak{Z}$. Daher ergibt sich aus (1) die Zerlegung

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}(A' - \zeta I') + \mathfrak{K}(A' - \zeta I'), \quad \mathfrak{B}(A' - \zeta I') \cap \mathfrak{K}(A' - \zeta I') = 0.$$

Nach §1, Hilfssatz 1 ist also $\beta(A' - \zeta I') = \nu(A' - \zeta I')$, und da wegen $\alpha(A - \zeta I) = \alpha(A' - \zeta I')$ und der Finitheit von A die Beziehung $\nu(A' - \zeta I') = \nu(A - \zeta I) < \infty$ gilt, folgt daraus $\beta(A' - \zeta I') = \nu(A' - \zeta I') < \infty$. Also ist A' finit. Dass A' symmetrisch ist, ist trivial.

Nun sei umgekehrt A auf $\mathfrak{z}$ finit. Aus $A\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{T}$ folgt $A\mathfrak{z} \subseteq A\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{z}$, d.h. $A\mathfrak{T}$ ist ein Zwischensystem zwischen $A\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}$. Daher ist nach dem eben Bewiesenen A auf $A\mathfrak{T}$ finit. Nach §2, Satz 4 folgt daraus, dass A auch auf $\mathfrak{T}$ finit ist. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Ist A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T} \subseteq \bar{\mathfrak{T}}$, so erhebt sich zuerst die Frage, ob A selbstadjungiert oder wenigstens abgeschlossen ist.[3] Der folgende Satz zeigt, dass dies im allgemeinen nicht der Fall ist.

Satz 1: Ist A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T}$ und besitzt A in $\bar{\mathfrak{T}}$ eine abgeschlossene, symmetrische und finite Erweiterung A', so ist A' auf ganz $\bar{\mathfrak{T}}$ definiert und vollstetig, A selbst daher beschränkt.

Beweis: Es sei $\mathfrak{T}' \supseteq \mathfrak{T}$ der Definitionsbereich von A', i die imaginäre Einheit. Nach Hilfssatz 2 existiert $R_i = (A' - iI')^{-1}$ auf ganz $\mathfrak{T}'$ und ist beschränkt. Weil A' abgeschlossen ist, ist auch R_i abgeschlossen. Aus der Beschränktheit und Abgeschlossenheit von R_i folgt, dass der Definitionsbereich von R_i, also $\mathfrak{T}'$, abgeschlossen ist. Da $\mathfrak{T}$, erst recht also $\mathfrak{T}'$ dicht in $\bar{\mathfrak{T}}$

3) Zur Definition dieser Begriffe siehe Riesz-Sz.-Nagy[14], S. 310 bzw. 299.

liegt, ist also $\mathfrak{T}' = \bar{\mathfrak{T}}$. Nach dem Satz von Hellinger-Toeplitz [4] ist daher A' beschränkt und nach §4, Satz 1 vollstetig.

Wir werden später sehen, dass A unbeschränkt sein kann, so dass ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T}$ in der Tat nicht abgeschlossen und erst recht nicht selbstadjungiert zu sein braucht. Er ist aber, wie der folgende Satz zeigen wird, wesentlich selbstadjungiert; dabei heisst eine dicht auf $\bar{\mathfrak{T}}$ definierte symmetrische lineare Transformation wesentlich selbstadjungiert, wenn $A^* = A^{**}$ ist, d.h. wenn ihre adjungierte Transformation A^* selbstadjungiert ist.

Satz 2: Ist der auf $\mathfrak{T} \subseteq \bar{\mathfrak{T}}$ definierte symmetrische Operator A finit, so ist A wesentlich selbstadjungiert, und die selbstadjungierte lineare Transformation A^* ist die einzige symmetrische abgeschlossene Erweiterung von A.

Beweis: Nach Hilfssatz 2 existiert $R_\zeta = (A - \zeta I)^{-1}$ für alle ζ mit $\mathrm{Im}\,\zeta \neq 0$ auf ganz $\mathfrak{T}$ (ist also dicht auf $\bar{\mathfrak{T}}$ definiert) und ist beschränkt. Die gesamte obere und untere (offene) Halbebene gehört also zur Resolventenmenge [5] von A, so dass Sp(A) reell ist. Nach Stone [16], Theorem 4.17 ist daher A wesentlich selbstadjungiert, d.h. es ist

(2) $\qquad A^* = A^{**}$.

Da A^* also selbstadjungiert, insbesondere also maximalsymmetrisch [6] ist, und da andererseits jede symmetrische abgeschlossene Erweiterung von A auch eine symmetrische Erweiterung

4) Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 295.
5) Resolventenmenge Rm(A) und Spektrum Sp(A) wurden auf S. 46 definiert.
6) Siehe Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 304.

von A^{**} ist [7], folgt aus (2), dass A^* die einzige symmetrische abgeschlossene Erweiterung von A ist.

Wir untersuchen nun die Beziehungen zwischen dem Spektrum des symmetrischen finiten Operators A und dem Spektrum von A^*, um mittels der Spektralzerlegung von A^* Rückschlüsse auf Sp(A) zu ziehen.

Da A^* nach Satz 2 selbstadjungiert ist, hat A^* nach Stone [16], Theorem 5.11 ein leeres Residualspektrum. Das Residualspektrum von A kann höchstens die Null enthalten, weil für $\zeta \neq 0$ wegen $\nu(A - \zeta I) = \beta(A - \zeta I)$ der Operator $A - \zeta I$ entweder keine Inverse oder eine auf $\mathfrak{T}$, also dicht auf $\bar{\mathfrak{T}}$ definierte Inverse besitzt. Es ist also

(3) $$RSp(A) - \{0\} = \emptyset \text{ [8]}.$$

Da $A^* = A^{**}$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A ist [9], gilt nach Stone [16], Theorem 4.9 :

$$Sp(A) = Sp(A^*),$$

(4) $$PSp(A) \subseteq PSp(A^*),$$

$$KSp(A) \supseteq KSp(A^*).$$

Da A^* als selbstadjungierte Transformation nur reelle Eigenwerte hat, folgt wegen (3) aus Stone [16], Theorem 4.15, dass jeder von Null verschiedene Eigenwert von A^* auch Eigenwert von A ist. Daraus folgt mit (4), dass

(5) $$PSp(A) - \{0\} = PSp(A^*) - \{0\}$$

ist. Es stimmen auch die Eigenräume zu entsprechenden Eigen-

---

7) Siehe Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 304 und 307.

8) Das Minuszeichen bedeutet die Bildung der Restmenge, $\emptyset$ die leere Menge.

9) Siehe Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 304.

werten $\neq 0$ überein, d.h. es ist

$$(6) \qquad \mathfrak{k}(A - \zeta I) = \mathfrak{k}(A^* - \zeta I)$$

für jeden Eigenwert $\zeta \neq 0$ von A. Es ist klar, dass $\mathfrak{k}(A-\zeta I) \subseteq \mathfrak{k}(A^*-\zeta I)$ ist. Es genügt also, die umgekehrte Ungleichung zu beweisen. Es sei $\mathfrak{T}^*$ der Definitionsbereich von A^* und $s \in \mathfrak{T}^*$. Da A^* die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A ist, wie wir eben schon sahen, gibt es eine Folge $s_n \in \mathfrak{T}$ derart, dass

$$s_n \to s, \quad As_n \to t \quad \text{und} \quad t = A^* s$$

ist. Somit konvergiert auch

$$(A - \zeta I)s_n \to (A^* - \zeta I)s.$$

Nach Hilfssatz 1 kann s_n als Summe

$$s_n = b_n + k_n \quad \text{mit} \quad b_n \in \mathfrak{L}(A - \zeta I), \; k_n \in \mathfrak{k}(A - \zeta I)$$

dargestellt werden, und da $\mathfrak{L}(A - \zeta I)$ zu $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ orthogonal ist, gilt

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|b_n - b_m\|^2 + \|k_n - k_m\|^2.$$

Daraus folgt wegen der Konvergenz der s_n, dass

$$k_n \to k, \quad b_n \to b$$

konvergiert, wobei k in $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ liegt, weil der Kern $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ wegen seiner endlichen Dimension abgeschlossen ist. Also ist

$$(7) \qquad s = \lim_{n\to\infty} b_n + k,$$

d.h. jedes Element $s \in \mathfrak{T}^*$ kann - und zwar eindeutig - als Summe eines Häufungspunktes von $\mathfrak{L}(A - \zeta I)$ und eines Elementes aus $\mathfrak{k}(A - \zeta I)$ dargestellt werden. Für ein $k^* \in \mathfrak{k}(A^* - \zeta I)$ erhalten wir nach dieser Bemerkung eine Zerlegung

$$k^* = \lim_{n\to\infty} (A^* - \zeta I)s_n + k.$$

Da A^* nach Satz 2 selbstadjungiert ist, ist $\mathfrak{L}(A^* - \zeta I)$ orthogonal zu $\mathfrak{k}(A^* - \zeta I)$ und daraus folgt, dass

$$k^* - k = \lim_{n\to\infty} (A^* - \zeta I)s_n = 0$$

und somit $\mathfrak{k}(A - \zeta I) \supseteq \mathfrak{k}(A^* - \zeta I)$ ist.

Da Punktspektrum und kontinuierliches Spektrum einer linearen Transformation punktfremd sind, wegen (3)

$$Sp(A) - \{0\} = (PSp(A) - \{0\}) \cup (KSp(A) - \{0\})$$

ist und diese Formel wegen $RSp(A^*) = \emptyset$ auch gilt, wenn man in ihr überall A durch A^* ersetzt, folgt aus der ersten Formel von (4) und aus (5), dass

$$KSp(A) - \{0\} = KSp(A^*) - \{0\} \tag{8}$$

ist. Ist $0 \in KSp(A^*)$, so ist nach (4) auch $0 \in KSp(A)$. Ist umgekehrt $0 \in KSp(A)$, so liegt nach (4) 0 in $Sp(A^*)$, und wegen $RSp(A^*) = \emptyset$ folgt daraus nach Stone [16], Theorem 4.15, dass $0 \in KSp(A^*)$ ist. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich mit (8), dass sogar

$$KSp(A) = KSp(A^*) \tag{9}$$

ist. Da A^* als selbstadjungierte lineare Transformation eine reelles, abgeschlossenes und nicht leeres Spektrum hat, ist nach (4) auch Sp(A) reell [10], abgeschlossen und nicht leer. Zusammenfassend haben wir damit den folgenden Satz gewonnen:

Satz 3: A sei ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{H} \subseteq \bar{\mathfrak{H}}$. Dann ist Sp(A) reell, abgeschlossen und nicht leer und stimmt, möglicherweise mit Ausnahme des Nullpunktes, in allen Einzelheiten mit dem Spektrum der selbstadjungierten linearen Transformation A^* überein, d.h. es ist

1. $Sp(A) = Sp(A^*)$,
2. $RSp(A) - \{0\} = RSp(A^*) = \emptyset$,
3. $KSp(A) = KSp(A^*)$,
4. $PSp(A) - \{0\} = PSp(A^*) - \{0\}$ und
   $\nu(A - \zeta I) = \nu(A^* - \zeta I)$ für jeden Eigenwert $\zeta \neq 0$ von A. Insbesondere ist also $\nu(A - \zeta I) = \nu(A^* - \zeta I)$ für solche ζ.

[10] Die Realität von Sp(A) wurde auch schon zu Anfang des Beweises von Satz 2 festgestellt.

Um den folgenden Satz 4 aussprechen zu können, geben wir zuerst eine Definition.

Definition: Ein Operator T auf $\mathfrak{T} \subseteq \bar{\mathfrak{T}}$ heisst schwach abgeschlossen, wenn aus

$$s_n \to \bar{s} \quad (s_n \in \mathfrak{T} \ , \ \bar{s} \in \bar{\mathfrak{T}}) \text{ und}$$
$$Ts_n \to t \in \mathfrak{T}$$

folgt, dass $\bar{s} \in \mathfrak{T}$ und $T\bar{s} = t$ ist.

Satz 4: Ist A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T} \subseteq \bar{\mathfrak{T}}$ so ist $A - \zeta I$ für jedes $\zeta \neq 0$ schwach abgeschlossen.

Beweis: Es sei $\mathfrak{T}^* \subseteq \bar{\mathfrak{T}}$ der Definitionsbereich der nach Satz 2 selbstadjungierten linearen Transformation A^* und $\zeta \neq 0$. $\{s_n\}$ sei eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{T}$, die gegen $\bar{s}$ konvergiert, und gleichzeitig konvergiere

$$(A - \zeta I)s_n = (A^* - \zeta I)s_n \to t$$

Aus der Abgeschlossenheit von A^* folgt, dass

(10) $\qquad \bar{s} \in \mathfrak{T}^* \quad$ und $\quad (A^* - \zeta I)\bar{s} = t$

ist. Daher ist unsere Behauptung bewiesen, sobald wir gezeigt haben, dass $\bar{s} \in \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}^*$ ist. Ist ζ kein Eigenwert von A, so gibt es wegen $\beta(A - \zeta I) = \nu(A - \zeta I) = 0$ zu $t \in \mathfrak{T}$ ein $s \in \mathfrak{T}$ mit

(11) $\qquad (A - \zeta I)s = t.$

Aus (10) und (11) folgt, dass

$$(A^* - \zeta I)(\bar{s} - s) = 0$$

ist. Da nach Satz 3 ζ auch kein Eigenwert von A^* ist, folgt aus der letzten Gleichung $\bar{s} - s = 0$, also $\bar{s} \in \mathfrak{T}$. Nun sei ζ ein Eigenwert von A. Nach Hilfssatz 1 besitzt $t \in \mathfrak{T}$ die Zerlegung

$$t = (A - \zeta I)s + k \quad \text{mit } s \in \mathfrak{T} \ , \ k \in \mathfrak{N}(A - \zeta I).$$

Daraus und aus (10) folgt

(12) $\qquad (A^* - \zeta I)(\bar{s} - s) = k.$

Da ζ als Eigenwert des symmetrischen Operators A reell ist, folgt aus dieser Gleichung

$$(k,k) = ((A^* - \zeta I)(\bar{s}-s), (A^* - \zeta I)(\bar{s}-s)) = ((A^* - \zeta I)^2(\bar{s}-s), \bar{s}-s) =$$
$$= ((A - \zeta I)k, \bar{s} - s) = (0, \bar{s}-s) = 0,$$

also $k = 0$. Daher ist $\bar{s} - s = k^* \in \mathfrak{K}(A^* - \zeta I)$, woraus nach Satz 3 folgt, dass $k^* \in \mathfrak{K}(A - \zeta I)$ ist. Also ist $\bar{s} = s + k^* \in \mathfrak{T}$. Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Die in Satz 4 ausgesprochene Eigenschaft der symmetrischen finiten Operatoren wird uns später noch bei der Charakterisierung dieser Operatoren begegnen.

Satz 3 erlaubt uns, den folgenden Satz über die Struktur des Spektrums von A - den Hauptsatz dieses Paragraphen - zu beweisen:

Satz 5: Es sei A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T} \subseteq \bar{\mathfrak{T}}$. Dann besteht $KSp(A) - \{0\}$ genau aus den von Null verschiedenen Häufungspunkten von Eigenwerten von A, die selbst keine Eigenwerte sind.

Beweis: Weil nach Satz 3 das Spektrum von A abgeschlossen und $RSp(A) - \{0\} = \emptyset$ ist, gehört jeder von Null verschiedene Häufungspunkt von Eigenwerten von A, der selbst kein Eigenwert ist, zu $KSp(A) - \{0\}$. Für den Nachweis, dass umgekehrt jeder Punkt aus $KSp(A) - \{0\}$ Häufungspunkt von Eigenwerten ist, genügt es, da nach Satz 3 das Spektrum von A reell ist, folgendes zu zeigen: Jedes offene Intervall (λ, μ) der reellen Achse, das

weder 0 noch einen Eigenwert von A enthält, gehört zu der Resolventenmenge von A.

Wir führen den Beweis dieser Behauptung in mehreren Schritten. Durchweg sei ξ ein beliebiger, aber fester Punkt aus (λ, μ).

(a) Da (λ, μ) weder Null noch einen Eigenwert von A enthält, ist $\beta(A - \xi I) = \nu(A - \xi I) = 0$. Also existiert $R_\xi = (A - \xi I)^{-1}$ und ist genau auf $\mathfrak{T}$ erklärt. Daher ist $(A - \xi I)^2 \mathfrak{T} = \mathfrak{T}$, woraus folgt, dass für beliebiges $s \in \mathfrak{T}$ die Gleichung

(13) $$(A - \xi I)^2 x = s$$

stets durch ein $x \in \mathfrak{T}$ lösbar ist. Nun gilt offenbar für zwei beliebige Zahlen ξ_1, ξ_2 die Identität

$$(A - \xi_2 I)^2 = (A - \xi_2 I)(A - \xi_1 I) + (\xi_2 - \xi_1)(A - \xi_2 I) + (\xi_2 - \xi_1)^2 I.$$

Diese Identität wenden wir für $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \zeta$ mit $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ auf das durch (13) bestimmte Element x an und erhalten so die Gleichung

(14) $$s = (A - \xi I)(A - \xi I)x + (\zeta - \xi)(A - \zeta I)x + (\zeta - \xi)^2 x.$$

Wegen $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ existiert nach Hilfssatz 2 die Resolvente $R_\zeta = (A - \zeta I)^{-1}$ auf ganz $\mathfrak{T}$. Wenden wir R_ζ auf die Gleichung (14) an, so erhalten wir

$$R_\zeta s = (A - \xi I)x + (\zeta - \xi)x + (\zeta - \xi)^2 R_\zeta x$$

und daraus die Gleichung

(15) $$(R_\zeta s, s) = ((A - \xi I)x, s) + (\zeta - \xi)(x, s) + (\zeta - \xi)^2 (R_\zeta x, s).$$

(b) Wir zeigen nun folgendes: Ist $\zeta = \alpha + i\beta$ und $\beta > 0$, so strebt $\nu(\alpha, \beta) = \operatorname{Im}(R_\zeta s, s)$ gegen 0 für $\zeta \to \xi$ im Winkelraum $\mathfrak{W}$: $|\alpha - \xi| \leq \beta$.

Beweis: Wegen $\operatorname{Im} \zeta = \beta > 0$ gilt nach Stone [16], Theorem 4.14 und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für den in (15) auftretenden Ausdruck $(R_\zeta x,s)$ die Abschätzung

$$|(R_\zeta x,s)| \leq \frac{\|x\| \cdot \|s\|}{\beta}$$

Damit folgt für die Punkte ζ des Winkelraumes $\mathfrak{W}$ die Abschätzung

$$|(\zeta - \xi)(x,s) + (\zeta - \xi)^2(R_\zeta x,s)| \leq 6\,\|x\| \cdot \|s\| \cdot \beta.$$

Mit Gleichung (15) ergibt sich daraus die Grenzwertbeziehung

(16) $\qquad (R_\zeta s,s) \to ((A - \xi I)x,s)$ für $\zeta \to \xi$ in $\mathfrak{W}$.

Da wegen der Realität von ξ der Operator $A - \xi I$ symmetrisch ist, folgt aus (13)

$$((A - \xi I)x,s) = ((A - \xi I)x,(A - \xi I)^2 x) = ((A - \xi I)^3 x,x).$$

Der letzte Glied dieser Gleichungskette ist wegen der Symmetrie von $(A - \xi I)^3$ reell, also ist auch $((A - \xi I)x,s)$ reell. Daher folgt aus (16), dass in der Tat $v(\alpha,\beta) \to 0$ für $\zeta \to \xi$ in $\mathfrak{W}$.

(c) Die Funktion $(R_\zeta s,s)$ ist für $\operatorname{Im}\zeta > 0$ und $\operatorname{Im}\zeta < 0$ regulär. Ist $s \neq 0$, so ist $\operatorname{Im}(R_\zeta s,s)$ in der oberen Halbebene positiv.

Beweis: Nach Satz 2 ist die Transformation A^* selbstadjungiert, infolgedessen gehören die obere und die untere Halbebene zu $\operatorname{Rm}(A^*)$. Ist $\tilde{R}_\zeta$ die Resolvente von A^*, so ist daher $(\tilde{R}_\zeta s,s)$ nach Stone [16], Theorem 4.12 in der oberen und unteren Halbebene eine reguläre Funktion von ζ. Da nach Satz 3 das Spektrum von A reell ist, ist für $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$ die Resolvente $\tilde{R}_\zeta$ eine Erweiterung von R_ζ, es ist also für jedes $s \in \mathfrak{T}$ und jedes ζ mit $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$

$$(\tilde{R}_\zeta s,s) = (R_\zeta s,s),$$

woraus nach dem Vorhergegangenen die behauptete Regularität von $(R_\zeta s,s)$ folgt.

Ist $\zeta = \alpha + i\beta$ und setzt man

$$R_\zeta s = t \text{ , also } s = (A - \zeta I)t,$$

so erhält man

$$(R_\zeta s,s) = (t,(A - \alpha I - i\beta I)t) = (t,(A - \alpha I)t) + i\beta(t,t).$$

Da $(t,(A - \alpha I)t)$ wegen der Realität von α und der Symmetrie von A reell ist, ist $\mathrm{Im}(R_\zeta s,s) = \beta(t,t)$. Da für $s \neq 0$ auch $t \neq 0$ ist, folgt aus dieser Gleichung, dass für $\beta > 0$ in der Tat $\mathrm{Im}(R_\zeta s,s) > 0$ ist.

(d) Es sei wieder $\zeta = \alpha + i\beta$ und $v(\alpha,\beta) = \mathrm{Im}(R_\zeta s,s)$. Wir zeigen nun, dass in jedem abgeschlossenen Teilintervall $[\lambda_1,\mu_1]$ von (λ,μ) die Funktion $v(\xi,\beta)$ gleichmässig in ξ gegen 0 strebt, wenn $\beta > 0$ und $\beta \to 0$.

Die Behauptung ist trivialerweise richtig, wenn $s = 0$ ist. Es sei weiterhin $s \neq 0$. Nach (c) ist $v(\alpha,\beta)$ in der oberen Halbebene eine positive Potentialfunktion und gestattet daher für $\beta > 0$ die folgende Poisson-Stieltjes'sche Integraldarstellung [11]:

$$(17) \qquad v(\alpha,\beta) = \delta\beta + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta}{(\tau-\alpha)^2+\beta^2}\, d\sigma(\tau);$$

hierin ist δ eine nichtnegative Konstante und $\sigma(\tau)$ eine nicht abnehmende Funktion. Loomis [10] hat nun gezeigt, dass unter diesen Voraussetzungen der Satz gilt: Strebt $v(\alpha,\beta) \to \varkappa$ wenn $(\alpha,\beta) \to (\xi,0)$ auf zwei verschiedenen Strahlen, die in der oberen Halbebene verlaufen und in $(\xi,0)$ einmünden, so existiert $\sigma'(\xi)$ und ist gleich $\frac{\varkappa}{\pi}$. Nach (b) erfüllt $v(\alpha,\beta)$ die Konvergenzvoraussetzung des Loomis'schen Satzes für jedes ξ in (λ,μ), und zwar ist $\varkappa = 0$. Also besitzt $\sigma(\tau)$ in dem Intervall (λ,μ) eine verschwindende Ableitung. Nach (17) ist daher

---

11) Für einen Beweis vgl. etwa Evans [5], S. 48.

$$v(\xi,\beta) = \delta\beta + \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{\beta}{(\tau-\xi)^2+\beta^2}\,d\sigma(\tau) + \int_{\mu}^{+\infty} \frac{\beta}{(\tau-\xi)^2+\beta^2}\,d\sigma(\tau)$$

Da $\delta \geq 0$, $\beta > 0$ und $\sigma(\tau)$ nicht abnehmend ist, folgt daraus für $\lambda < \lambda_1 \leq \xi \leq \mu_1 < \mu$ die Abschätzung

$$v(\xi,\beta) \leq 2\delta\beta + \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{\beta}{(\tau-\lambda_1)^2+\beta^2}\,d\sigma(\tau) + \int_{\mu}^{+\infty} \frac{\beta}{(\tau-\mu_1)^2+\beta^2}\,d\sigma(\tau)$$

$$\leq v(\lambda_1,\beta) + v(\mu_1,\beta).$$

Da $v(\lambda_1,\beta)$ und $v(\mu_1,\beta)$ nach (b) gegen 0 streben, wenn $\beta \to 0$, folgt aus dieser Abschätzung, dass $v(\xi,\beta)$ gleichmässig für alle ξ des Intervalles $[\lambda_1,\mu_1]$ gegen 0 strebt, wenn $\beta \to 0$.

(e) $(R_\zeta s,s)$ ist für jedes $s \in \mathfrak{H}$ in dem Gebiet, das aus der oberen und der unteren Halbebene und dem Intervall (λ,μ) besteht, eine reguläre Funktion von ζ.

Diese Behauptung folgt in Verbindung mit der Gleichung $(R_{\bar\zeta} s,s) = \overline{(R_\zeta s,s)}$ aus (c), (d) und dem Schwarzschen Symmetrieprinzip [12].

(f) Nach Stone [16], Theorem 5.10 besteht zwischen der Spektralschar $E(\tau)$ der selbstadjungierten linearen Transformation A^* und ihrer Resolvente $\tilde R_\zeta$ die folgende Beziehung:

$$\frac{1}{2}\left[\left\{(E(\omega_1)s,s) + (E(\omega_1-0)s,s)\right\}\right] -$$

$$\frac{1}{2}\left[\left\{(E(\omega_2)s,s) + (E(\omega_2-0)s,s)\right\}\right] = \tag{18}$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}(\omega_1,\omega_2,\gamma,\varepsilon)} (\tilde R_\zeta s,s)\,d\zeta\,;$$

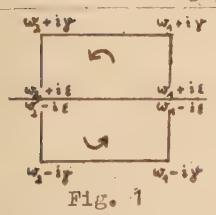

Fig. 1

dabei besteht $\mathfrak{L}(\omega_1,\omega_2,\gamma,\varepsilon)$ aus zwei orientierten Polygonzügen, deren Ecken aus Fig. 1 zu entnehmen sind; insbesondere ist also $\omega_2 < \omega_1$ und $0 < \varepsilon < \gamma$.

12) Vgl. etwa Valiron [18], S. 444.

Ist $\lambda < \omega_1 < \omega_2 < \mu$, so ist nach Stone [16], Definition 5.2 und Theorem 5.11 $E(\omega_\nu - 0) = E(\omega_\nu)$, $\nu = 1,2$, da in (λ, μ) kein Eigenwert von A und somit, nach Satz 3, auch keiner von A^* liegt. Da für $s \in \mathfrak{T}$ ausserdem $\tilde{R}_\zeta s = R_\zeta s$ ist, erhalten wir dank der in (e) festgestellten Regularität von $(R_\zeta s, s)$ aus (18) die für alle $s \in \mathfrak{T}$ gültige Gleichung

(19) $\qquad (E(\omega_1)s,s) - (E(\omega_2)s,s) = 0.$

Da $\mathfrak{T}$ in $\bar{\mathfrak{T}}$ dicht liegt und die Projektionsoperatoren $E(\nu)$ auf $\bar{\mathfrak{T}}$ definiert und beschränkt sind, gilt (19) sogar für alle $s \in \bar{\mathfrak{T}}$, woraus die Gleichung $E(\omega_1) = E(\omega_2)$ folgt. Da ω_1, ω_2 beliebig in (λ, μ) waren, ergibt sich nach der bekannten Charakterisierung des Spektrums durch die Spektralschar [13], dass (λ, μ) zu $Rm(A^*)$, nach Satz 3 also auch zu $Rm(A)$ gehört.

Damit ist der Satz 5 vollständig bewiesen.

Aus Satz 5 folgt ein Existenzsatz für Eigenwerte, nämlich

Satz 6: Ein symmetrischer finiter Operator A, der von Null verschieden ist, besitzt mindestens einen von Null verschiedenen Eigenwert. [14]

Andernfalls bestünde nämlich nach den Sätzen 3 und 5 das Spektrum der selbstadjungierten linearen Transformation A^* genau aus dem Nullpunkt. Die Intervalle $0 < \lambda < +\infty$ und $-\infty < \lambda < 0$ würden also zu $Rm(A^*)$ gehören, wären somit Konstanzintervalle der Spektralschar $E(\lambda)$ von A^* (vgl. dazu

13) Vgl. Stone [16], Definition 5.2 und Theorem 5.11.

14) Dieser Satz wurde bereits von Wielandt [20] auf der Basis der in (a) bis (c) gefundenen Ergebnisse, aber ohne die hier durchgeführte Erweiterungstheorie bewiesen.

Stone [16], Definition 5.2 und Theorem 5.11). Weil für die Spektralschar einer selbstadjungierten Transformation die Limesbeziehungen

$$E(\lambda) \to I \quad \text{für} \quad \lambda \to +\infty \quad , \quad E(\lambda) \to 0 \quad \text{für} \quad \lambda \to -\infty$$

gelten (vgl. Stone [16], Definition 5.1 und Theorem 5.6), wäre in unserem Falle also

$$E(\lambda) = I \quad \text{für} \quad 0 < \lambda < +\infty,$$

$$E(\lambda) = 0 \quad \text{für} \quad -\infty < \lambda < 0.$$

Daraus folgt mit Hilfe der Spektraldarstellung von A (vgl. Stone [16], Theorem 5.9), dass $A^* = 0$, also auch $A = 0$ ist, im Widerspruch zu der Voraussetzung $A \neq 0$.

Ueber die Verteilung der Eigenwerte macht der folgende Satz eine Aussage; um ihn formulieren zu können, führen wir zuerst den Begriff des α-Grades ein, eine Verallgemeinerung des bei Hermiteschen Matrizen bekannten Positivitätsgrades.

Definition: Ist $\alpha \geq 0$, so ist der α-Grad eines symmetrischen Operators A gleich $\overline{\text{fin}}[\mathfrak{U}]$, wo $\mathfrak{U}$ alle endlichdimensionalen Unterräume des Definitionsbereiches von A durchläuft, auf denen $(Au,u) \geq \alpha(u,u)$ ist.

Mit dieser Definition gilt

Satz 7: Die Anzahl der Eigenwerte (jeder in seiner Vielfachheit gezählt) des symmetrischen finiten Operators A auf $\mathfrak{H}$, die $\geq \alpha > 0$ sind, ist gleich dem α-Grad von A [15].

Beweis: Der α-Grad von A sei gleich r. Dann kann es nicht mehr als r Eigenwerte von A geben, die $\geq \alpha$ sind. Denn sind die

[15] Ein äquivalenter Satz wurde von Wielandt [20] mittels der Entwicklung (41) bewiesen.

p Eigenwerte $\xi_1, \ldots, \xi_p$ alle $\geq \alpha$ und sind $e_1, \ldots, e_p$ zugehörige orthonormierte Eigenlösungen, so bestimmen sie einen p-dimensionalen Unterraum, für dessen Elemente e offenbar $(Ae,e) \geq \alpha(e,e)$ ist, also ist $p \leq r$. Es kann aber auch nicht weniger als r Eigenwerte $\geq \alpha$ geben. Denn angenommen, es gäbe nur $p < r$ solcher Eigenwerte; sie seien wieder $\xi_1, \ldots, \xi_p$, und $e_1, \ldots, e_p$ seien zugehörige orthonormierte Eigenlösungen, die den p-dimensionalen Unterraum $\mathfrak{k}$ aufspannen. $\mathfrak{k}$ ist ein vollständiger und unter A invarianter Unterraum von $\mathfrak{r}$. Nach Hilfssatz 3 ist also A_1, die Einschränkung von A auf das orthogonale Komplement $\mathfrak{k}^\perp$ zu $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{r}$ ein symmetrischer finiter Operator. Daher können wir auf A_1, $A_1^* = (A_1)^*$, $\mathfrak{k}^\perp$, $\overline{\mathfrak{k}^\perp}$ (= Abschliessung von $\mathfrak{k}^\perp$ in $\bar{\mathfrak{r}}$) die für A, A^*, $\mathfrak{r}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ gefundenen Ergebnisse anwenden. Da nach Satz 3 $RSp(A_1) - \{0\} = \emptyset$ ist und die Eigenwerte von A_1 genau die Eigenwerte $< \alpha$ von A sind, gilt nach Satz 5 für alle Punkte μ des Spektrums von A_1 die Ungleichung $\mu \leq \alpha$, und nach Satz 3 gilt diese Ungleichung auch für alle Punkte μ des Spektrums der selbstadjungierten Transformation A_1^*. Nach Stone [16], Theorem 5.12 folgt daraus für alle $f \in \mathfrak{k}^\perp$ die Ungleichung

(20) $$(A_1^* f, f) \leq \alpha(f,f).$$

Da $p < r$ ist, gibt es nach der Definition von r in $\mathfrak{r}$ einen Unterraum $\mathfrak{U}$ der endlichen Dimension $q > p$, auf dem

(21) $$(Au,u) \geq \alpha(u,u)$$

ist. Wegen $q > p$ existiert in $\mathfrak{U}$ ein Element $u_o \neq 0$, das in $\mathfrak{k}^\perp$ liegt. Da A_1^* eine Erweiterung von A_1 ist, folgt aus (20) und (21) die Gleichung

(22) $$(A_1^* u_o, u_o) = \alpha(u_o, u_o).$$

$E(\lambda)$ sei die zu A_1^* gehörende Spektralschar. Da alle Punkte λ

mit $\lambda > \alpha$ zu $Rm(A_1^*)$ gehören, für diese λ also $E(\lambda) = I$ ist (vgl. den entsprechenden Schluss auf S. 97), hat die Spektralzerlegung von $(A_1^* u_0, u_0)$ die Form

$$(A_1^* u_0, u_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(E(\lambda)u_0, u_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d \|E(\lambda)u_0\|^2 .$$

Nach (22) ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d \|E(\lambda)u_0\|^2 = \alpha(u_0, u_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha d \|E(\lambda)u_0\|^2 ,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \lambda) d \|E(\lambda)u_0\|^2 = 0.$$

Da $\|E(\lambda)u_0\|^2$ eine nicht abnehmende Funktion ist, folgt daraus $\|E(\lambda)u_0\|^2 = \text{const.}$ für $\lambda < \alpha$, also $\|E(\lambda)u_0\|^2 = 0$ für $\lambda < \alpha$, da $E(-\infty) = 0$. Daraus und aus $E(\lambda) = I$ für $\lambda \geq \alpha$ folgt nach Stone [16], Theorem 5.13, dass α ein Eigenwert von A_1^* und u_0 eine dazugehörige Eigenlösung ist. Da $\alpha \neq 0$ ist, folgt daraus nach Satz 3, dass u_0 auch Eigenlösung von A_1 (also auch von A) zum Eigenwert α ist, im Widerspruch dazu, dass u_0 in $\mathfrak{L}^{\perp}$ liegt und somit keine Eigenlösung zu einem Eigenwert $\geq \alpha$ von A ist.

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

A sei wieder ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ ein Unterraum von $\mathfrak{T}$ mit der endlichen Dimension r, auf dem

(23) $\qquad (Au,u) > 0$ für alle $u \neq 0$

ist. Durchläuft u alle normierten Elemente von $\mathfrak{U}$, so besitzt (Au,u) ein positives Minimum $m(\mathfrak{U})$. Es sei

(24) $\qquad \varphi_r = \overline{\text{fin}}\, m(\mathfrak{U}),$

wobei $\mathfrak{U}$ in der Menge aller r-dimensionalen Unterräume von $\mathfrak{T}$ variiert, auf denen die Ungleichung (23) gilt; wir wollen annehmen, dass diese Menge für wenigstens ein r

nicht leer ist. Offenbar gilt, soweit die φ_r erklärt sind, die Ungleichungskette $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \cdots$. Ferner nehmen wir an, dass A nach oben halbbeschränkt sei, d.h. dass es eine reelle Zahl C mit

(25) $$(As,s) \leq C(s,s) \quad \text{für alle } s \in \mathfrak{H}$$

gibt. Da es nach unserer Voraussetzung wenigstens einen Unterraum $\mathfrak{U}$ der Dimension r gibt, auf dem (23) gilt, ist $C > 0$. Ist ξ ein Eigenwert von A und ist $Ae = \xi e$ mit $\|e\| = 1$, so folgt aus (25) die Eigenwertabschätzung

(26) $$\xi \leq C.$$

Aus (26) folgt, dass φ_1, also auch jedes φ_r endlich ist. Denn wäre $\varphi_1 = \infty$, so gäbe es zu jeder noch so grossen positiven Zahl α einen eindimensionalen Unterraum $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{H}$ mit $m(\mathfrak{U}) \geq \alpha$, so dass für alle $u \in \mathfrak{U}$ die Ungleichung

$$(Au,u) \geq \alpha(u,u)$$

gelten würde. Der α-Grad von A wäre also ≥ 1 und daher müsste es nach Satz 7 mindestens einen Eigenwert $\xi \geq \alpha$ von A geben, was für $\alpha > C$ zu einem Widerspruch mit (26) führt.

Zwischen den Grössen φ_r und dem α-Grad von A besteht die folgende Beziehung:

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist der

(27) $$(\varphi_r - \varepsilon)\text{-Grad} \geq r \quad \text{und der}$$
$$(\varphi_r + \varepsilon)\text{-Grad} < r.$$

Nach der Definition von φ_r gibt es nämlich zu einem beliebigen positiven ε einen Unterraum $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{H}$ der Dimension r mit $\varphi_r - \varepsilon \leq m(\mathfrak{U}) \leq \varphi_r$, für dessen Elemente u also die Ungleichung

$$(Au,u) \geq m(\mathfrak{U})(u,u) \geq (\varphi_r - \varepsilon)(u,u)$$

gilt. Daher ist der $(\varphi_r - \varepsilon)$-Grad $\geq r$. Wäre der $(\varphi_r + \varepsilon)$-Grad $\geq r$, so gäbe es einen Unterraum $\mathfrak{U}$ mit $[\mathfrak{U}] \geq r$, auf dem die Ungleichung

$$(Au,u) \geq (\varphi_r + \varepsilon)(u,u)$$

gelten würde. Diese Ungleichung wäre erst recht auf jedem r-dimensionalen Unterraum von $\mathfrak{U}$ erfüllt, im Widerspruch zur Definition von φ_r.

Nach Satz 7 folgt aus (27), dass es mindestens r Eigenwerte $\geq \varphi_r - \varepsilon$, aber höchstens $r - 1$ Eigenwerte $\geq \varphi_r + \varepsilon$ von A gibt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir somit den folgenden

Satz 8: Es sei A ein symmetrischer finiter und nach oben halbbeschränkter Operator auf $\mathfrak{r}$; die Grössen φ_r seien durch (24) definiert. Dann ist $\varphi_r < \infty$, es gibt höchstens $r - 1$ Eigenwerte $> \varphi_r$, und φ_r ist entweder selbst Eigenwert oder ein Häufungspunkt von Eigenwerten.

Wir wollen zu diesem Satz noch einige Bemerkungen machen. Da es höchstens $r - 1$ Eigenwerte $> \varphi_r$ gibt, liegt rechts von φ_1 kein Eigenwert mehr. Nach Satz 8 ist φ_1 also entweder der grösste Eigenwert oder gleich dem oberen Limes aller Eigenwerte von A. Ist φ_1 Häufungspunkt von Eigenwerten, so ist $\varphi_1 = \varphi_r$ für alle $r = 2,3,\ldots$. Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann mindestens r Eigenwerte ξ_ϱ mit $\varphi_1 - \varepsilon \leq \xi_\varrho$, also ist auf dem r-dimensionalen Raum $\mathfrak{k}$, der von den zugehörigen Eigenlösungen aufgespannt wird, $(Ae,e) \geq (\varphi_1 - \varepsilon)(e,e)$, also $m(\mathfrak{k}) \geq \varphi_1 - \varepsilon$. Da trivialerweise $\varphi_1 \geq m(\mathfrak{k})$ ist, folgt daraus die behauptete Gleichung $\varphi_1 = \varphi_r$. Ist φ_1 ein isolierter Eigenwert von A mit der Vielfachheit v, so gilt auf dem zuge-

nörigen v-dimensionalen Eigenraum $\mathfrak{k}$ die Gleichung $(Ae,e) = \varphi_1(e,e)$, woraus wegen $\varphi_1 \geq \varphi_v$ die Gleichung $\varphi_1 = \varphi_v$ folg Wegen $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \cdots$ ist also $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_v$. Ist φ_{v+1} erklärt, so ist $\varphi_v > \varphi_{v+1}$; denn aus $\varphi_v = \varphi_{v+1}$ folgt nach (27) und Satz 7, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ mindestens v + 1 Eigenwerte $\geq \varphi_{v+1} - \varepsilon = \varphi_v - \varepsilon$ gibt, also gibt es, da $\varphi_v = \varphi_1$ und φ_1 isolierter und grösster Eigenwert von A ist, mindestens v + 1 Eigenwerte, die mit φ_1 übereinstimmen, d.h. φ_1 hat mindestens die Vielfachheit v + 1, im Widerspruch zur Voraussetzung. φ_{v+1} ist nach Satz 8 entweder selbst Eigenwert oder gleich dem oberen Limes aller Eigenwerte von A. φ_{v+1} ist offenbar nicht erklärt, wenn φ_1 der einzige positive Eigenwert von A ist.

Wesentlich dieselben Ueberlegungen lassen sich statt auf φ_1 auf φ_{v+1} anwenden, falls φ_{v+1} erklärt ist. Wir wollen dies nicht mehr durchführen, sondern nur das Ergebnis festhalten, zu dem man durch diese Betrachtungen gelangt: Man erhält eine Folge $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \cdots$, und diese Folge positiver Zahlen bricht genau dann bei φ_n ab, d.h. genau dann ist φ_{n+1} nicht mehr erklärt bzw. $\varphi_{n-1} > \varphi_n = \varphi_{n+k}$ für $k = 1,2,\ldots$, wenn es nur n positive Eigenwerte von A gibt bzw. wenn φ_n gleich dem oberen Limes aller Eigenwerte von A ist; $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$ sind dann alle Eigenwerte von A, der Grösse nach geordnet und ihrer Vielfachheit entsprechend aufgezählt, die grösser als φ_n sind. Dieses Ergebnis ist ein Analogon zu dem bekannten Courantschen Maximum-Minimum-Prinzip.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch für die negativen Eigenwerte anstellen. Wir wollen diese Ueberlegungen nicht durchführen, sondern dazu übergehen, die Struktur des Spektrums von A

unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über A bzw. $\mathfrak{r}$ zu untersuchen und damit insbesondere die Beziehungen zwischen den finiten und den vollstetigen symmetrischen Operatoren zu klären.

Satz 9: Ein symmetrischer finiter Operator A auf $\mathfrak{r} \leq \bar{\mathfrak{r}}$ besitzt genau dann eine selbstadjungierte vollstetige Erweiterung, wenn die Eigenwerte von A höchstens eine Nullfolge bilden.

Beweis: Wenn A eine selbstadjungierte, also auch abgeschlossene Erweiterung besitzt, so stimmt sie nach Satz 2 mit A^* überein. Ist A^* vollstetig, so bilden die Eigenwerte von A^* höchstens eine Nullfolge, und aus Satz 3 folgt, dass dann das gleiche für die Eigenwerte von A gilt. Bilden umgekehrt die Eigenwerte von A höchstens eine Nullfolge, so folgt aus Satz 5, dass Sp(A) nur aus diesen Eigenwerten und eventuell der Null besteht. Nach Satz 3 besteht also auch das Spektrum der nach Satz 2 selbstadjungierten linearen Transformation A^* aus höchstens einer Nullfolge von Eigenwerten und eventuell der Null. Nach der spektralen Charakterisierung der selbstadjungierten vollstetigen Transformationen ist daher A^* vollstetig, also besitzt A eine vollstetige selbstadjungierte Erweiterung, nämlich A^*.

Satz 10: Ist A ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{r} \leq \bar{\mathfrak{r}}$ und gibt es eine natürliche Zahl n, so dass A^n vollstetig ist, so besitzt A eine selbstadjungierte vollstetige Erweiterung.

Beweis: Ist ξ ein Eigenwert von A, e eine zugehörige Eigen-

lösung, so folgt aus der Gleichung $Ae = \zeta e$ durch mehrfache Anwendung von A, dass $A^n e = \zeta^n e$ ist, d.h. ζ^n ist Eigenwert von A^n. Da der Operator A^n vollstetig ist und seine Eigenwerte daher höchstens eine Nullfolge bilden, folgt daraus, dass auch die Eigenwerte von A höchstens eine Nullfolge bilden. Ferner folgt aus der Vollstetigkeit von A^n nach der Rieszschen Theorie der vollstetigen Operatoren [16] und §1, Corollar 1, dass A^n vollfinit ist, nach §2, Corollar 7 ist daher auch A vollfinit. Aus diesen beiden Ergebnissen über A folgt, nach Satz 9 die Behauptung.

Satz 11: Ist A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T} \leq \bar{\mathfrak{T}}$ und gibt es zwischen $A\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ einen (vollständigen) Hilbert-Raum $\mathfrak{Z}$: $A\mathfrak{T} \leq \mathfrak{Z} \leq \mathfrak{T}$, so ist A vollstetig, und A^* ist eine selbstadjungierte vollstetige Erweiterung von A. die auf ganz $\bar{\mathfrak{T}}$ definiert ist.

Beweis: Die Einschränkung A' von A auf den (trivialerweise invarianten) Unterraum $\mathfrak{Z}$ ist symmetrisch, und da $\mathfrak{Z}$ vollständig ist, folgt aus dem Satz von Hellinger-Toeplitz [17], dass A' beschränkt ist. Nach Hilfssatz 4 ist A' finit. Damit erfüllt A' alle Voraussetzungen des Satzes 1 aus §4, also bilden (nach diesem Satz) die Eigenwerte von A' höchstens eine Nullfolge. Da A und A' die gleichen von Null verschiedenen Eigenwerte haben [18], folgt daraus, dass auch die Eigenwerte von A höchstens eine Nullfolge bilden. Nach Satz 9 besitzt daher A

16) Vgl. Riesz [13] und Riesz-Sz.-Nagy [14]. Die dort vorausgesetzte Vollständigkeit des zugrunde liegenden Raumes ist nicht wesentlich. Siehe dazu Zaanen [24].

17) Vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 295.

18) Vgl. die erste Formel im Beweis des Hilfssatzes 4.

eine selbstadjungierte vollstetige Erweiterung, die nach Satz 2 mit A^* übereinstimmt. Da A^* als vollstetige Transformation beschränkt und als selbstadjungierte Transformation abgeschlossen ist, ist A^* auf ganz $\mathfrak{r}$ definiert. Wir zeigen nun, dass A selbst vollstetig ist. Ist $\{s_n\}$ eine beschränkte Folge von Elementen aus $\mathfrak{r}$, so gibt es gemäss der Definition der Vollstetigkeit eine Teilfolge $\{s_{n_k}\}$ derart, dass

(28) $\quad A^* s_{n_k} \to \bar{s} \in \bar{\mathfrak{r}}$.

Da A^* eine Erweiterung von A, also $A^* s_{n_k} = A s_{n_k} \in A\mathfrak{r}$ ist, und da $A\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{z}$ vollständig, also auch abgeschlossen ist, folgt aus (28), dass $A s_{n_k} \to \bar{s} \in \mathfrak{r}$. Also ist A vollstetig.

Corollar 1: Ein auf $\mathfrak{r}$ definierter symmetrischer Operator A von endlichem Rang ist vollstetig.

Beweis: Nach §2, Satz 13 ist A als Operator von endlichem Rang finit. Da $A\mathfrak{r}$ von endlicher Dimension ist, ist A ein vollständiger Hilbert-Raum. Aus Satz 11 ergibt sich dann die Behauptung, wenn man $\mathfrak{z} = A\mathfrak{r}$ setzt.

Corollar 2: Ein symmetrischer finiter Operator A auf $\mathfrak{r}$ ist genau dann von endlichem Rang, wenn $A\mathfrak{r}$ ein vollständiger Hilbert-Raum ist.

Beweis: Ist A von endlichem Rang, so ist $A\mathfrak{r}$ von endlicher Dimension, also ein vollständiger Hilbert-Raum.

Nun sei umgekehrt $A\mathfrak{r}$ ein vollständiger Hilbert-Raum. Aus Satz 11 folgt, wenn man $\mathfrak{z} = A\mathfrak{r}$ setzt, dass A^* ein selbst-

adjungierter vollstetiger und auf ganz $\bar{\mathfrak{T}}$ definierter Operator ist. Insbesondere ist also A^* beschränkt. Ist $\bar{s} \in \bar{\mathfrak{T}}$ und $\{s_n\}$ eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{T}$, die gegen $\bar{s}$ konvergiert[19], so strebt daher $A^* s_n \to A^* \bar{s}$. Da $A^* s_n = A s_n \in A\mathfrak{T}$ und $A\mathfrak{T}$ vollständig, also auch abgeschlossen ist, folgt daraus, dass $A^* \bar{s} \in A\mathfrak{T}$ ist, d.h. es ist $A^* \bar{\mathfrak{T}} \subseteq A\mathfrak{T}$. Da trivialerweise $A^* \bar{\mathfrak{T}} \supseteq A\mathfrak{T}$ ist, ist also $A^* \bar{\mathfrak{T}} = A\mathfrak{T}$, und daher ist $A^* \bar{\mathfrak{T}}$ vollständig. Wir zeigen nun nach diesen Vorbereitungen, dass die Eigenwerte $\neq 0$ von A^* sich nicht in Null häufen. Andernfalls gäbe es nämlich eine Folge von Eigenwerten $\xi_n \neq 0$ von A^* mit $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$. Ist e_n eine orthonormierte Folge von zu ξ_n gehörigen Eigenlösungen, so strebt also

$$A^* e_n = \xi_n e_n \to 0 = A^* 0 . \tag{29}$$

Da der beschränkte Operator A^* den Hilbert-Raum $\bar{\mathfrak{T}}$ auf den Hilbert-Raum $A^* \bar{\mathfrak{T}}$ abbildet, folgt aus (29) zusammen mit Theoreme 4 aus Banach [3], S.40, dass es eine Folge von Elementen x_n aus $\bar{\mathfrak{T}}$ mit

$$A^* x_n = \xi_n e_n \quad \text{und} \quad x_n \to 0$$

gibt. Wegen $A^* x_n = A^* e_n$ lässt sich x_n mit einem geeigneten $k_n \in \mathfrak{K}(A^*)$ in der Form $x_n = e_n + k_n$ schreiben. Da $e_n \in A^* \bar{\mathfrak{T}}$ und $A^* \bar{\mathfrak{T}}$ wegen der Symmetrie des Operators A^* orthogonal zu $\mathfrak{K}(A^*)$ ist, folgt aus $e_n + k_n = x_n \to 0$, dass auch $e_n \to 0$ strebt, was wegen der Normierung $\| e_n \| = 1$ jedoch nicht möglich ist. In der Tat können sich also die Eigenwerte von A^* nicht in Null häufen. Da A^* vollstetig ist, folgt daraus, dass A^* nur endlich viele von Null verschiedene Eigenwerte besitzt und daher nach dem Entwicklungssatz für symmetrische vollstetige Operatoren von endlichem Rang ist. Erst recht ist also die Ein-

19) Da $\mathfrak{T}$ dicht in $\bar{\mathfrak{T}}$ liegt, gibt es zu jedem $\bar{s} \in \bar{\mathfrak{T}}$ eine solche Folge von Elementen aus $\mathfrak{T}$.

schränkung A von A^* von endlichem Rang, womit Corollar 2 vollständig bewiesen ist.

Satz 12: Es sei A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T}, \bar{\mathfrak{T}}$ und $\xi \neq 0$ ein Eigenwert von A. Ist $\mathfrak{B}(A - \xi I)$ von zweiter Kategorie in seiner abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{B}(A - \xi I)}$, so ist ξ kein Häufungspunkt von Eigenwerten von A.

Beweis: Es sei $\bar{s}$ ein Element aus $\bar{\mathfrak{T}}$, das orthogonal zu $\mathfrak{K}(A - \xi I)$ ist. Weil $\mathfrak{T}$ dicht in $\bar{\mathfrak{T}}$ liegt, gibt es eine Folge von Elementen s_n aus $\mathfrak{T}$, die gegen $\bar{s}$ konvergiert. Da nach Hilfssatz 1

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{B}(A - \xi I) + \mathfrak{K}(A - \xi I)$$

ist, lässt sich s_n in eine Summe

$$s_n = b_n + k_n \quad \text{mit} \quad b_n \in \mathfrak{B}(A - \xi I),\ k_n \in \mathfrak{K}(A - \xi I)$$

zerlegen, und da nach dem gleichen Hilfssatz $\mathfrak{B}(A - \xi I)$ orthogonal zu $\mathfrak{K}(A - \xi I)$ ist, folgt aus der Konvergenz der s_n, dass auch die Folgen $\{b_n\}$ und $\{k_n\}$ konvergieren. Es ist also

$$\bar{s} = \lim s_n = \lim b_n + \lim k_n \,. \tag{30}$$

$\mathfrak{K}(A - \xi I)$ ist wegen der Finitheit des Operators A von endlicher Dimension, also ein (vollständiger) Unterraum von $\bar{\mathfrak{T}}$, so dass $\lim k_n = k \in \mathfrak{K}(A - \xi I)$ ist. Daher folgt aus (30) durch skalare Multiplikation mit k die Beziehung

$$0 = (\bar{s}, k) = (\lim b_n, k) + (k,k) = \lim (b_n, k) + (k,k) = (k,k),$$

also ist $k = 0$. Nach (30) ist daher $\bar{s} = \lim b_n$, also liegt $\mathfrak{B}(A - \xi I)$ dicht im orthogonalen Komplement $\mathfrak{K}^\perp$ von $\mathfrak{K}(A - \xi I)$ in $\bar{\mathfrak{T}}$, d.h. es ist

$$\overline{\mathfrak{B}(A - \xi I)} = \mathfrak{K}^\perp \tag{31}$$

Da A^* nach Satz 2 selbstadjungiert ist, ist $\mathfrak{B}(A^* - \xi I)$ ortho-

gonal zu $\mathfrak{N}(A^* - \zeta I)$. Weil nach Satz 3 $\mathfrak{N}(A^* - \zeta I) = \mathfrak{N}(A - \zeta I)$ ist, folgt daraus, dass

(32) $$\mathfrak{H}(A^* - \zeta I) \subseteq \mathfrak{N}^{\perp}$$

ist. Trivialerweise ist

(33) $$\mathfrak{H}(A - \zeta I) \subseteq \mathfrak{H}(A^* - \zeta I),$$

denn A^* ist eine Erweiterung von A. Aus (31), (32) und (33) erhält man die Ungleichungskette

(34) $$\mathfrak{H}(A - \zeta I) \subseteq \mathfrak{H}(A^* - \zeta I) \subseteq \overline{\mathfrak{H}(A - \zeta I)}.$$

Da nach der Voraussetzung $\mathfrak{H}(A - \zeta I)$ von zweiter Kategorie in $\overline{\mathfrak{H}(A - \zeta I)}$ ist, folgt aus (34), dass $\mathfrak{H}(A^* - \zeta I)$ von zweiter Kategorie in dem Hilbert-Raum $\overline{\mathfrak{H}(A - \zeta I)}$ ist. Da $A^* - \zeta I$ ausserdem abgeschlossen ist, gilt nach Hille [9], Theorem 2.13.7 sogar

$$\mathfrak{H}(A^* - \zeta I) = \overline{\mathfrak{H}(A - \zeta I)},$$

und zu jedem $b \in \mathfrak{H}(A^* - \zeta I)$ gibt es ein s aus dem Definitionsbereich $\mathfrak{T}^*$ von A^*, so dass

(35) $$b = (A^* - \zeta I)s \quad \text{und} \quad \|s\| \leq m \cdot \|b\|$$

mit einer von b unabhängigen Zahl $m > 0$ ist.

Wir nehmen nun im Gegensatz zur Behauptung unseres Satzes an, ζ sei ein Häufungspunkt von Eigenwerten. Dann gibt es eine Folge $\{\zeta_n\}$ von Eigenwerten von A, die gegen ζ konvergiert. Da $\zeta \neq 0$ ist, können wir annehmen, dass alle $\zeta_n \neq 0$ sind. Dann sind nach Satz 3 alle ζ_n Eigenwerte von A^*; $\{e_n\}$ sei eine Folge zugehöriger orthonormierter Eigenlösungen. Es folgt, dass

$$\|(A^* - \zeta I)e_n\| = \|(A^* - \zeta_n I)e_n + (\zeta_n - \zeta)e_n\| = |\zeta_n - \zeta| \to 0,$$

also

(36) $$b_n = (A^* - \zeta I)e_n \to 0$$

strebt. Nach (35) gibt es zu den b_n Elemente s_n aus $\mathfrak{T}^*$, so dass

$$b_n = (A^* - \zeta I)s_n \quad \text{und} \quad \|s_n\| \leq m\|b_n\|$$

ist. Wegen (36) folgt daraus

$$s_n = e_n + k_n \text{ mit } k_n \in \mathfrak{K}(A^* - \zeta I) \quad \text{und} \quad s_n \to 0.$$

Da $s_n = e_n + k_n$ also (stark) gegen Null konvergiert, strebt s_n erst recht schwach gegen Null [20]. Da die Folge $\{e_n\}$ als Orthonormalfolge ebenfalls schwach gegen Null konvergiert [21], folgt daraus, dass $k_n = (e_n + k_n) - e_n$ schwach gegen Null konvergiert, also auch stark, weil die k_n in dem Raum $\mathfrak{K}(A^* - \zeta I)$ liegen, der nach Satz 3 gleich $\mathfrak{K}(A - \zeta I)$, also von endlicher Dimension ist [22]. Daher konvergiert $e_n = (e_n + k_n) - k_n = s_n - k_n$ (stark) gegen Null, was wegen $\|e_n\| = 1$ jedoch unmöglich ist. In der Tat ist also ζ ein isolierter Eigenwert von A.

Satz 13: Ist A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T} \leq \bar{\mathfrak{T}}$ und gibt es ein lineares System $\mathfrak{z}$ zwischen $A\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$, das in seiner abgeschlossenen Hülle $\bar{\mathfrak{z}}$ von zweiter Kategorie ist, so ist jeder von Null verschiedene Häufungspunkt von Eigenwerten von A selbst wieder Eigenwert.

Beweis: Wir nehmen zuerst an, es sei $\mathfrak{z} = \mathfrak{T}$. Ist $\lambda \neq 0$ kein Eigenwert von A, so ist nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{T} = \mathfrak{H}(A - \lambda I)$, und da A^* eine Erweiterung von A ist, folgt daraus

$$\mathfrak{T} \leq \mathfrak{H}(A^* - \lambda I) \leq \bar{\mathfrak{T}}. \tag{37}$$

Da nach der Voraussetzung $\mathfrak{z} = \mathfrak{T}$ in $\bar{\mathfrak{z}} = \bar{\mathfrak{T}}$ von zweiter Kategorie ist, ist nach (37) auch $\mathfrak{H}(A^* - \lambda I)$ von zweiter Kategorie in $\bar{\mathfrak{T}}$. Da λ nach Satz 3 kein Eigenwert von A^* ist und $A^* - \lambda I$ abgeschlossen ist, folgt daraus nach Hille [9], Theorem 2.13.7, dass λ zu $Rm(A^*)$, nach Satz 3 also zu $Rm(A)$

20) Die Definition der schwachen Konvergenz und der Beweis, dass aus der (starken) Konvergenz die schwache folgt, ist bei Riesz-Sz.-Nagy [14], S.196 zu finden.
21) Das ist eine einfache Folge der Besselschen Ungleichung.
22) In einem endlichdimensionalen Hilbert-Raum ist die schwache Konvergenz gleichbedeutend mit der starken.

gehört. Da Rm(A) offen ist, kann λ nicht Häufungspunkt von Eigenwerten sein, also ist umgekehrt jeder von Null verschiedene Häufungspunkt von Eigenwerten selbst Eigenwert von A. Es sei nun $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{r}$. Da $\mathfrak{z}$ zwischen $A\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}$ liegt, ist nach Hilfssatz 4 die Einschränkung A' von A auf $\mathfrak{z}$ symmetrisch und finit. Nach dem eben Bewiesenen gilt daher die Behauptung des Satzes jedenfalls für A'. Da A genau dieselben Eigenwerte $\neq 0$ besitzt wie A' [23], ist damit unser Satz vollständig bewiesen.

Aus den Sätzen 5 und 13 folgt:

Corollar 3: Unter den Voraussetzungen des Satzes 13 besteht das kontinuierliche Spektrum von A höchstens aus dem Nullpunkt.

Beispiel: Betrachtet man in dem speziellen (vollständigen) Hilbert-Raum $\bar{\mathfrak{r}}_0$ der komplexen Zahlenfolgen $(x_1, x_2, \ldots)$ mit $\sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$ alle abbrechenden Zahlenfolgen (d.h. diejenigen Folgen, bei denen nur endlich viele Glieder von Null verschieden sind), so ist die Menge dieser Folgen ein lineares System $\mathfrak{r}$, das dicht in $\bar{\mathfrak{r}}_0$ liegt. Man prüft leicht nach, dass die Diagonalmatrix $\alpha = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ einen finiten Operator A auf $\mathfrak{r}$ darstellt, wenn die Diagonalelemente ξ_ν z.B. paarweise verschieden sind; diese Diagonalelemente sind genau die Eigenwerte von A. Sind sie reell, so ist A offenbar symmetrisch. Indem man die (paarweise verschiedenen und reellen) ξ_ν geeignet wählt, sieht man, dass für den symmetrischen finiten Operator A kurz gesagt "alle Fälle" eintreten können, genauer: A kann unbeschränkt sein [24], es kann Häufungspunkte von Eigenwerten geben, die selbst keine

[23] Siehe die erste Formel im Beweis zu Hilfssatz 4.

[24] Dieser Fall tritt ein, wenn die ξ_ν eine unbeschränkte Folge bilden. Denn wie man leicht sieht (vgl. den ganz analogen Beweis der Abschätzung (26)) bilden die Eigenwerte eines beschränkten Operators eine beschränkte Menge.

Eigenwerte sind und solche, die Eigenwerte sind. Man sieht daraus, dass die symmetrischen finiten Operatoren eine Klasse bilden, die beträchtlich allgemeiner ist als die Klasse der symmetrischen vollstetigen Operatoren, wenngleich auch beide Klassen, wie unsere Sätze lehren, in enger Verbindung miteinander stehen.

Es ist nun ein Leichtes, aus unserer bisherigen Theorie einen Entwicklungssatz herzuleiten. Es sei A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T} \subseteq \overline{\mathfrak{T}}$. Wir bilden den Unterraum $\mathfrak{k}$ von $\overline{\mathfrak{T}}$, der von allen Eigenlösungen der nach Satz 2 selbstadjungierten Transformation A^* aufgespannt wird und dazu das orthogonale Komplement $\mathfrak{k}^\perp$ von $\mathfrak{k}$ in $\overline{\mathfrak{T}}$. P sei die orthogonale Projektion von $\overline{\mathfrak{T}}$ auf $\mathfrak{k}^\perp$. Die Unterräume $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}^\perp$ reduzieren [25] die Transformation A^*, mit s liegt also auch Ps in dem Definitionsbereich $\mathfrak{T}^*$ von A^*, und es ist

$$A^* Ps = PA^* s \in \mathfrak{k}^\perp.$$

Ist insbesondere $s \in \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}^*$, so ist demnach

$$A^* Ps = PAs, \tag{38}$$

und daraus folgt wegen $As \in \mathfrak{T}$, dass A^* das lineare System $P\mathfrak{T}$ in sich abbildet, d.h. die Einschränkung $\overline{A}^*$ von A^* auf $P\mathfrak{T}$ ist ein Operator auf $P\mathfrak{T}$. Wir zeigen, dass

$$\nu(\overline{A}^* - \zeta I) = \beta(\overline{A}^* - \zeta I) = 0 \quad \text{für alle} \quad \zeta \neq 0 \tag{39}$$

ist. Da alle Eigenlösungen von A^* in $\mathfrak{k}$ liegen, ist trivialerweise

$$\nu(\overline{A}^* - \zeta I) = 0 \quad \text{für alle } \zeta \tag{40}$$

Ist $\zeta \neq 0$, so besteht nach Hilfssatz 1 die Zerlegung $\mathfrak{T} = \mathfrak{k}(A - \zeta I) + \mathfrak{d}(A - \zeta I)$, aus der mit (38) die Gleichung

[25] Zur Definition der Reduktion vgl. Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 301 f, zur Behauptung über die Reduktion von A^* ebendort, S. 359 f.

$P\mathfrak{T} = P\,\mathfrak{A}(A - \zeta I) = P(A - \zeta I)\mathfrak{T} = (A' - \zeta I)P\mathfrak{T} = (\overline{A'} - \zeta I)P\mathfrak{T}$ folgt. Die Gleichheit der beiden Aussenglieder dieser Beziehung besagt gerade, dass $\beta(\overline{A'} - \zeta I) = 0$ ist. Damit ist (39) bewiesen. (39) besagt, dass $\overline{A'}$ ein finiter Operator ist, der keinen Eigenwert $\neq 0$ besitzt. Da trivialerweise $\overline{A'}$ als Einschränkung der selbstadjungierten Transformation A' symmetrisch ist, folgt daraus nach Satz 6, dass $\overline{A'} = 0$ ist. Daher nimmt (40) die Form an : auf $P\mathfrak{T}$ ist $\nu(\zeta I) = 0$ für alle ζ Das ist jedoch nur möglich, wenn $P\mathfrak{T}$ nur das Nullelement enthält. Somit liegt ganz $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{k}$, und daher ist $\mathfrak{k} = \overline{\mathfrak{T}}$. Jedes Element von $\overline{\mathfrak{T}}$ ist also in eine Fourierreihe nach Eigenlösungen von A' entwickelbar. Zusammen mit Satz 3 ergibt sich daraus insbesondere der folgende, von Wielandt [20] auf andere Weise gewonnene Entwicklungssatz:

Satz 14: Ist A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{T}$, so kann jedes Element des Bildbereiches von A in eine Fourierreihe nach den zu Eigenwerten $\zeta \neq 0$ gehörigen Eigenlösungen e von A entwickelt werden, d.h. für jedes $s \in \mathfrak{T}$ gilt

(41) $$As = \sum_{e \in \mathfrak{E}} (As,e)e = \sum_{e \in \mathfrak{E}} \zeta(s,e)e \;,$$

$\mathfrak{E}$ bedeutet hierbei ein vollständiges orthonormales Eigensystem von Eigenlösungen zu den Eigenwerten $\neq 0$ von A.[26)]

Es entsteht die Frage, ob die Darstellung (41) zusammen mit der endlichen Vielfachheit der Eigenwerte $\neq 0$ von A die symmetrischen finiten Operatoren charakterisiert. Das ist nicht der Fall, selbst dann nicht, wenn man noch für jedes $\lambda \neq 0$ die

26) Die Reihe (41) ist bekanntlich in dem Sinne zu verstehen, dass in sie nur diejenigen - abzählbar vielen - Glieder aufgenommen werden, für die $(s,e) \neq 0$ ist.

schwache Abgeschlossenheit [27] von $A - \lambda I$ fordert. Es sei nämlich $\overline{\mathfrak{r}}$ wieder der (komplexe) Hilbertsche Folgenraum, $\{e_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in ihm und $\{\mu_n\}$ eine beschränkte Folge paarweis verschiedener reeller Zahlen mit positiver unterer Grenze. Definiert man auf $\overline{\mathfrak{r}}$ einen Operator A durch

$$As = \sum_1^\infty \mu_n (s, e_n) e_n ,$$

so sieht man leicht, dass A symmetrisch ist und dass genau die μ_n Eigenwerte von A, und zwar mit der Vielfachheit 1 sind. Ausserdem ist A beschränkt, und daher ist trivialerweise $A - \lambda I$ für jedes $\lambda \neq 0$ schwach abgeschlossen. Wäre A finit, so müssten nach §4, Satz 1 die Eigenwerte μ_n gegen Null konvergieren, was wegen der Voraussetzung $\overline{\text{fin}}\, \mu_n > 0$ nicht möglich ist. Also ist A nicht finit.

Die unmittelbare Umkehrung des Satzes 14 wird im wesentlichen dadurch vereitelt, dass die Eigenwerte sich unter Umständen in von Null verschiedenen Punkten häufen können, und in solchen Punkten versagt der bekannte Auflösungsprozess für Funktionalgleichungen der Form $(A - \lambda I)x = s$, der sich auf die Entwicklung (41) stützt. Man wird daher über die Häufungspunkte von Eigenwerten noch besondere Voraussetzungen machen müssen und gelangt so zu

Satz 15: Die folgenden Bedingungen sind zusammen notwendig und hinreichend dafür, dass ein auf $\mathfrak{r} \leq \overline{\mathfrak{r}}$ definierter symmetrischer Operator A finit ist:

---

27) Siehe Satz 4 und die ihm vorangestellte Definition der schwachen Abgeschlossenheit.

(a) Für jedes $\lambda \neq 0$ ist $A - \lambda I$ schwach abgeschlossen.

(b) Alle Eigenwerte $\neq 0$ von A haben endliche Vielfachheit.

(c) Für jedes $s \in \mathfrak{T}$ gilt die Entwicklung (41).

(d) In den von Null verschiedenen Häufungspunkten η der Eigenwerte von A erfüllt $A - \eta I$ die 2. Kettenbedingung.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingungen (a) bis (d) ergibt sich der Reihe nach aus Satz 4, der Definition der Finitheit, Satz 14 und Hilfssatz 1. Wir beweisen nun, dass sie hinreichend sind. Ist $\mu \neq 0$ kein Häufungspunkt von Eigenwerten von A, s ein beliebiges Element aus $\mathfrak{T}$, das orthogonal zu $\mathfrak{K}(A - \mu I)$ ist, so setzen wir eine Lösung der Gleichung

$$(A - \mu I)x = s \tag{42}$$

gemäss dem Auflösungsverfahren für Funktionalgleichungen [28] in der Form

$$x = \sum_{1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\mu} \frac{1}{\xi_n - \mu} (s, e_n) e_n - \frac{1}{\mu} s \tag{43}$$

an; e_n durchläuft dabei diejenigen Eigenlösungen aus dem Eigensystem E (siehe Satz 14, die Entwicklung (41) wird ja nun vorausgesetzt), für die $(s, e_n) \neq 0$ ist; ξ_n sind die zugehörigen Eigenwerte $\neq 0$. Für alle n ist $\mu \neq \xi_n$. Denn diese Ungleichung ist trivial, wenn μ kein Eigenwert ist. Ist aber μ ein Eigenwert, e eine zugehörige Eigenlösung, so ist $(s, e) = 0$, da nach der Voraussetzung s zu $\mathfrak{K}(A - \mu I)$ orthogonal ist, also stimmt e mit keinem der in (43) auftretenden Eigenlösungen e_n überein, und daher ist auch $\mu \neq \xi_n$. Aus dieser Ungleichung und der Voraussetzung, dass μ kein Häufungspunkt von Eigenwerten ist, folgt $\underline{\text{fin}} |\xi_n - \mu| > 0$. Also ist die Folge der Zahlen $\alpha_n = \frac{\xi_n}{\mu} \cdot \frac{1}{\xi_n - \mu}$ beschränkt; es sei etwa $|\alpha_n| \leq C$. Daraus folgt

[28] Vgl. etwa Riesz-Sz.-Nagy [14], S. 233.

$$\left\|\sum''\alpha_n(s,e_n)e_n\right\|^2 = \left(\sum''\alpha_n(s,e_n)e_n, \sum''\alpha_n(s,e_n)e_n\right) = \sum''|\alpha_n|^2|(s,e_n)|^2$$
$$\leq C^2\cdot\sum''|(s,e_n)|^2.$$

Da nach der Besselschen Ungleichung die Reihe $\sum''|(s,e_n)|^2$ konvergiert, folgt aus dieser Abschätzung die Konvergenz der Reihe (43). Entwickelt man nun auch As gemäss (41) in eine Reihe nach Eigenlösungen, so überzeugt man sich durch eine kurze Rechnung davon, dass

$$(A - \mu I)s_n \to s$$

strebt, wobei s_n die n-te Teilsumme von (43) bedeuten soll. Nach (a) ist daher $x = \lim_{n\to\infty} s_n$ ein Element von $\mathfrak{H}$ und $(A-\mu I)x = s$. Ist $\mathfrak{N}^\perp$ die Menge aller Elemente $s \in \mathfrak{H}$, die zu $\mathfrak{N}(A - \mu I)$ orthogonal sind, so ist also

$$\mathfrak{N}^\perp \subseteq \mathfrak{B}(A - \mu I). \tag{44}$$

Ist μ kein Eigenwert von A, so ist $\mathfrak{N}(A - \mu I) = 0$, also $\mathfrak{N}^\perp = \mathfrak{H}$, und aus (44) folgt daher $\mathfrak{B}(A - \mu I) = \mathfrak{H}$, also

$$\beta(A - \mu I) = \nu(A - \mu I) = 0. \tag{45}$$

Ist μ ein Eigenwert von A, so ist μ wegen der Symmetrie von A reell, also ist $A - \mu I$ symmetrisch und daher $\mathfrak{B}(A - \mu I)$ orthogonal zu $\mathfrak{N}(A - \mu I)$, d.h. es ist

$$\mathfrak{N}^\perp \supseteq \mathfrak{B}(A - \mu I). \tag{46}$$

Aus (44) und (46) folgt

$$\mathfrak{N}^\perp = \mathfrak{B}(A - \mu I). \tag{47}$$

Da nach (b) der Eigenwert μ endliche Vielfachheit besitzt, $\mathfrak{N}(A - \mu I)$ also ein endlichdimensionaler und daher vollständiger Unterraum von $\mathfrak{H}$ ist, ist $\mathfrak{N}^\perp$ ein Komplement zu $\mathfrak{N}(A - \mu I)$ in $\mathfrak{H}$ [29], zusammen mit (47) ergibt sich also

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(A - \mu I) + \mathfrak{N}(A - \mu I) \text{ mit } \mathfrak{B}(A - \mu I) \cap \mathfrak{N}(A - \mu I) = 0.$$

[29] Siehe Zaanen [24], S. 116, Theorem 3.

Nach §1, Hilfssatz 1 und wegen der endlichen Dimension von $\mathfrak{A}(A - \mu I)$ folgt daraus die Defektrelation

(48) $$\beta(A - \mu I) = \nu(A - \mu I) < \infty .$$

Ist $\mu \neq 0$ ein Häufungspunkt von Eigenwerten, so erfüllt $A - \mu I$ nach (d) die 2. Kettenbedingung. Da μ wegen der Realität der Eigenwerte des symmetrischen Operators A selbst reell ist, ist $A - \mu I$ symmetrisch und erfüllt daher die 1. Kettenbedingung (mit einer Kettenlänge ≤ 1) [30]. $A - \mu I$ erfüllt also beide Kettenbedingungen, und da $\nu(A - \mu I)$ nach (b) endlich ist, folgt daraus nach §2, Corollar 1 die Defektrelation

(49) $$\beta(A - \mu I) = \nu(A - \mu I) < \infty .$$

Die Relationen (45), (48) und (49) besagen zusammen, dass der Operator A finit ist.

Damit ist der Satz 15 vollständig bewiesen.

---

30) Ist T symmetrisch und $T^2 s = 0$, so ist $0 = (T^2 s, s) = (Ts, Ts)$, also ist $Ts = 0$, d.h. T erfüllt die 1. Kettenbedingung mit einer Kettenlänge ≤ 1.

Literaturverzeichnis.

[1] Atkinson, F.V.: Die normale Auflösbarkeit linearer Gleichungen in normierten linearen Räumen. Mat. Sbornik n.S. 28 (70), 3 - 14 (1951) [Russisch; Ref.: Zbl. 42, 120 (1952)].

[2] Atkinson, F.V.: On relatively regular operators. Acta Sci. Math. Szeged 15, 38 - 56 (1953) .

[3] Banach, S.: Theorie des operations lineaires. Warszawa 1932.

[4] Dieudonne, J.: Sur les homomorphismes d'espaces normes. Bull. Sci. Math. (2) 67, 72 - 84 (1943).

[5] Evans, G.C.: The Logarithmic Potential. Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 6. New York 1927.

[6] Gochberg, I.C.: Ueber lineare Gleichungen im Hilbertschen Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR n.S. 76, 9 - 12 (1951) [Russisch ; Ref.: Zbl. 42, 120 (1952)].

[7] Goldman, M.A. und S.N. Krackovskij: Ueber die Nullelemente eines linearen Operators in seinem Fredholmschen Gebiet. Doklady Akad. Nauk SSSR n.S. 86, 15 - 17 (1952) [Russisch; Ref.: Zbl. 47, 360 (1953)].

[8] Hausdorff, F.: Zur Theorie der linearen metrischen Räume. J.f.Math. 167, 294 - 311 (1932) .

[9] Hille, E.: Functional analysis and semi-groups. Amer.Math. Soc. Coll. Publ. vol. 31 New York 1948.

[10] Loomis, L.H.: The converse of the Fatou Theorem for positive harmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 53, 239 - 250 (1943).

[11] Nikolskij, S.: Linear equations in normed linear space. Izvestija Akad. Nauk SSSR 7, 147 - 166 [Russisch; Ref.: Math. Reviews 5, 187 (1944)].

[12] Reid, W.T.: Symmetrizable completely continous transformations in Hilbert space. Duke Math. J. 18, 41 - 56 (1951).

[13] Riesz, F.: Ueber lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. 41, 71 - 98 (1918) .

[14] Riesz, F. et B. v. Sz.-Nagy: Lécons d'analyse fonctionelle. Budapest 1952.

[15] Ruston, A.F.: Operators with a Fredholm theory.J.Lond. Math.Soc. 29, 318-326 (1954).

[16] Stone, M.H.: Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. Amer.Math.Soc. Coll. Publ. vol. 15. New York 1932.

[17] Sz.-Nagy, B.v.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Erg. d. Math. V/5. Berlin 1942

[18] Valiron, G.: Theorie des fonctions. Paris 1948.

[19] Wielandt, H.: Ueber die Eigenwertaufgaben mit reellen diskreten Eigenwerten. Math. Nachr. 4, 308 - 314, (1950/51).

[20] Wielandt, H.: Allgemeine Eigenwerttheorie. Vorlesung SS 1952, Tübingen.

[21] Williamson, J.H.: Linear transformations in arbitrary linear spaces. J. Lond. Math. Soc. 28, 203 - 210 (1953) .

[22] Yood, B.: Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation. Duke Math. J. 18, 599 - 612 (1951).

[23] Zaanen, A.C.: Ueber vollstetige symmetrische und symmetrisierbare Operatoren. Nieuw Archief v.Wiskunde (2) 22, 57 - 80 (1943).

[24] Zaanen, A.C.: Linear Analysis. Amsterdam-Groningen 1953.

L e b e n s l a u f

Am 26. Dezember 1927 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Heinrich Heuser und seiner Ehefrau Else Heuser geb. Schlenck in Nastätten/Taunus geboren. In Nastätten besuchte ich von 1934-37 die Volksschule, anschliessend die dortige Aufbauschule und trat 1938 in das Institut Hofmann in St. Goarshausen ein. 1944 wurde ich zum Reichsarbeitsdienst und zur Wehrmacht einberufen, von 1945-47 war ich in Kriegsgefangenschaft. Im Juli 1948 legte ich am Institut Hofmann in St. Goarshausen die Reifeprüfung ab.

Von 1948 bis 1954 studierte ich Mathematik und Physik an der Universität Tübingen und bestand dort die Vordiplomprüfung und im November 1954 das Staatsexamen. 1952 schloss ich die Ehe mit Frl. Elisabeth Schwarz. Im Wintersemester 1954/55 war ich als Hilfsassistent am Mathematischen Institut der Universität Tübingen beschäftigt, seit dem 1. Mai 1955 bin ich als wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut (Lehrstuhl Prof.Dr.Wittich) der Technischen Hochschule in Karlsruhe tätig.

Ich hörte Vorlesungen bei den Herren Professoren Braunbek, Kamke, Kneser, Knopp, Kossel, Miller, Pickert, Wielandt und Wittich. Ihnen allen bin ich zu Dank verpflichtet. Besonderen Dank schulde ich meinen verehrten Lehrern Herrn Professor Kamke und Herrn Professor Wielandt. Herr Professor Wielandt regte mich zu der vorliegenden Arbeit an und unterstützte mich bei ihrer Durchführung, Herr Professor Kamke übernahm das Referat und erteilte mir zahlreiche fördernde Ratschläge.